Ս. Է. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

11-րդ դասարանի դասագիրք

Հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար

ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ Է ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

ԵՐԵՎԱՆ
ՏԻԳՐԱՆ ՄԵԾ
ՓԲԸ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2010

ՀՏԴ 373.167.1:514 (075.3)
ԳՄԴ 22.151 ց72
Հ 177

Մասնագիտական խմբագիր՝ Լ. Ա. Մաթևոսյան

Հակոբյան Ս.Է.
Հ 177 Երկրաչափություն: Դասագիրք հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի 11-րդ դասարանի համար/ Ս. Է. Հակոբյան; Մասնագիտ. խմբ.՝ Լ. Ա. Մաթևոսյան. - Եր.: Տիգրան Մեծ, 2010. - 136 էջ:

ՀՏԴ 373.167.1:514 (075.3)
ԳՄԴ 22.151 ց72

ISBN 978-99941-0-374-4

Առաջաբան

Հանրակրթական ավագ դպրոցի 11-րդ դասարանի երկրաչափության դասընթացը 10-րդ դասարանի դասընթացի շարունակությունն է: Դրանք ներկայացնում են երկրաչափության հիմնական բաժիններից մեկի՝ տարածաչափության փոխկապակցված մասեր, որոնց կհաջորդի նաև 12-րդ դասարանի ուսումնական նյութը, և դրանով կամբողջանա երկրաչափության հանրակրթական դասընթացը: 10-րդ դասարանում դիտարկվել են տարածաչափության հիմնական հասկացությունները, բացահայտվել դրանց առնչությունները, և հանգամանորեն ուսումնասիրվել են բազմանիստերը: 11-րդ դասարանում նախատեսվում է ընդլայնել երկրաչափական մարմինների և դրանց հատկությունների վերաբերող պատկերացումները, հանգամանորեն ուսումնասիրել պտտական մարմինները, ինչպես նաև դիտարկել տարածության մեջ վեկտորների ու կոորդինատական մեթոդի կիրառությունները: Դասընթացի հիմնական նպատակն է՝ զարգացնել սովորողների ճանաչողական ունակությունները, պատկերային ու տրամաբանական մտածողությունը, իհարկե, նաև երկրաչափական գիտելիքները կյանքի տարբեր իրադրություններում կիրառելու կարողությունները:

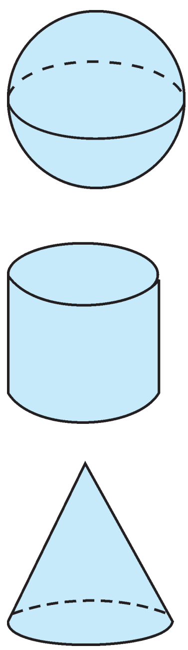
Դասագիրքը հասցեագրվում է առավելապես այն դպրոցականներին, ովքեր նախընտրել են ընդհանուր կամ հումանիտար հոսքերի ծրագրեր: Այդ առումով հնարավորինս պարզեցվել է ինչպես տեսական նյութի շարադրանքը, այնպես էլ խնդիրների համակարգը: Փոխարենը հետևողականորեն անդրադարձ է արվում հումանիտար և կիրառական նշանակություն ունեցող այնպիսի հարցերի, որոնք կնպաստեն սովորողների համակողմանի զարգացմանն ու արժեքային կողմնորոշումների ձևավորմանը: Միաժամանակ առավել հետաքրքրասերների, մասնավորապես ընդհանուր հոսքի սովորողների համար դասագրքի յուրաքանչյուր գլխի վերջում բերվում են լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ, իսկ գրքի վերջում՝ օժանդակ նյութեր՝ «Հիմնավորենք մեր գիտելիքները» խորագրի տակ (դրանց համարակալումն առանձնանում է «Ա» տառի նշումով, օրինակ՝ Ա–1, Ա–2 և այլն): Դասագրքում առավել դժվար խնդիրների համարներն աստղանշված են (օրինակ՝ 48, 50* և այլն), իսկ այն խնդիրները, որոնց լուծումը հումանիտար հոսքերի սովորողների համար պարտադիր չէ, համարանշված են գունավոր թվանշաններով: Դասագրքի վերջում բերված են գրեթե բոլոր առաջադրանքների պատասխանները, ինչպես նաև որոշակի ցուցումներ համեմատաբար բարդ առաջադրանքների համար:*

ԳԼՈՒԽ I

ՊՏՏԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐ

§ 1 ԳԼԱՆ

1.1. Գաղափար պտտական պատկերի մասին

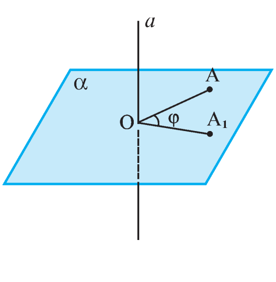


Նկ. 1

Մենք արդեն ուսումնասիրել ենք բազմանիստերը, որոնց մակերևույթը կազմված է վերջավոր թվով բազմանկյուններից: Սակայն մեր շրջակայքի առարկաներից բոլորը չէ, որ բազմանիստի տեսք ունեն: Բաժակները, դույլերը, կաթսաները, պահածոների տուփերը, ֆուտբոլի կամ թենիսի գնդակները և բազմաթիվ այլ առարկաներ, ինչպես ընդունված է անվանել, *կլոր մարմիններ* են: Դուք հաճախ լսում և արտաբերում եք *երկրագունդ, քառագլան շարժիչ, կոնաձև գմբեթ* և նման այլ բառեր ու բառակապակցություններ, որոնցով արտահայտվող պատկերներն են *գունդը, գլանը, կոնը* (նկ. 1): Այս պատկերները միավորվում են մեկ այլ անվանումով ևս. դրանք կոչվում են նաև *պտտական պատկերներ*: Այդպիսի անվանման հիմքում ընկած է այն հանգամանքը, որ գլանը, կոնը, գունդը, ինչպես նաև տարածական բազմաթիվ այլ պատկերներ կարող են ստացվել պտտման միջոցով:

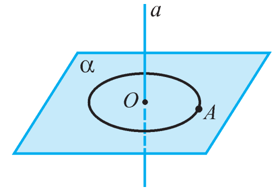
Նախ ավելի հանգամանորեն դիտարկենք կետի պտույտը որևէ ուղղի շուրջը:

Դիցուք՝ տարածության մեջ տրված են a ուղիղը, նրա վրա չգտնվող A կետը և որևէ φ մեծությամբ անկյուն: A կետով տանենք a ուղղին ուղղահայաց α հարթությունը և դրանց հատման կետը նշանակենք O: Եթե α հարթության մեջ գտնվող A_1 կետն այնպիսին է, որ $A_1O=AO$, և $\angle A_1OA$-ի մեծությունը հավասար է φ-ի, ապա կասենք, որ A_1 կետը ստացվել է A կետից՝ a ուղղի շուրջը φ անկյամբ պտտումից (նկ. 2): Տրված a ուղիղը կոչվում է *պտտման առանցք*: Նկատենք, որ պտույտ կարող է լինել ինչպես ժամսլաքի, այնպես էլ հակառակ ուղղությամբ:



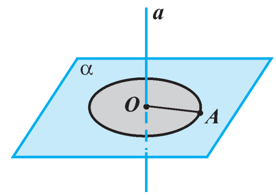
Նկ. 2

Այժմ դիտարկենք a առանցքի շուրջը A կետի՝ ոչ միայն տրված φ անկյունով, այլ *բոլոր հնարավոր* անկյուններով պտույտներից ստացված կետերի բազմությունը: Դժվար չէ համոզվել, որ այդ դեպքում α հարթության մեջ կառաջանա OA շառավիղով շրջանագիծ*, որի կենտրոնը O կետն է (նկ. 3):

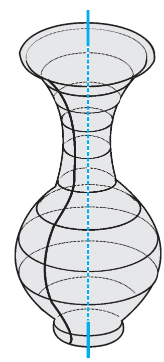


Նկ. 3

Կետի պտույտի նմանությամբ և նրա հիման վրա դիտարկվում է նաև ցանկացած գծի պտույտը տրված առանցքի շուրջը: Օրինակ, եթե վերևում նկարագրված եղանակով դիտարկենք OA հատվածի բոլոր կետերի պտույտներից ստացվող պատկերը, ապա կարող ենք համոզվել, որ առաջանում է O կենտրոնով և OA շառավիղով շրջան (նկ. 4): Ուրեմն՝ կետի պտտումից առաջանում է շրջանագիծ, իսկ գծի պտտումից՝ մակերևույթ, որը հաճախ անվանվում է նաև *պտտական պատկեր*: Երկրաչափության մեջ ուսումնասիրվում են առանցքի շուրջ տարբեր գծերի պտտումից առաջացած պատկերներ: Այդպիսի տեսք ունեն, օրինակ, բրուտագործների պատրաստած իրերից շատերի մակերևույթները (նկ. 5): Սակայն մենք այստեղ կդիտարկենք միայն համեմատաբար պարզ, բայց լայն կիրառություններ ունեցող պատկերները՝ գլանը, կոնը և գունդը:



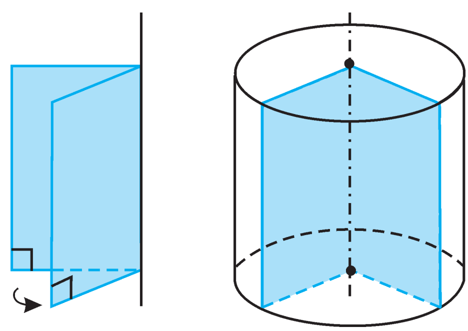
Նկ. 4



Նկ. 5

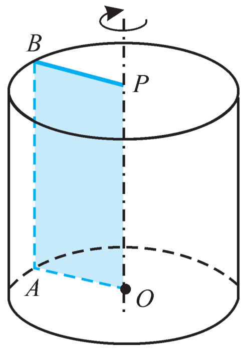
1.2. Ուղիղ շրջանային գլան

Առօրյայում հանդիպող առարկաներից շատերի, օրինակ՝ գրիչի, մատիտի, խողովակի, պահածոյի տուփի, շարժիչի մխոցի, հաղորդալարի, բույսի ցողունի և այլնի մասին խոսելիս մենք հաճախ ասում ենք, որ դրանք *գլանաձև* են: Գլանը կարելի է պատկերացնել որպես այնպիսի մարմին, որն առաջանում է ուղղանկյան՝ կողմերից մեկի շուրջը պտտումից (նկ. 6): Ավելի հանգամանորեն դիտարկենք գլանի ստացումը և ծանոթանանք նրա հետ կապված հասկացություններին:

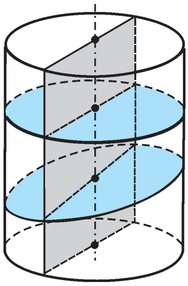


Նկ. 6

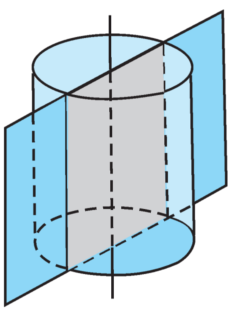
* Տարածության մեջ գտնվող շրջանագիծը գծագրի վրա պատկերվում է «սեղմված» շրջանագծի, այսինքն՝ էլիպսի տեսքով: Իրականում ևս, եթե փորձեք դիտել շրջանաձև առարկայի ստվերը էկրանի վրա, ապա կտեսնեք, որ լույսի ճառագայթների թեք անկման դեպքում ստվերը երևում է էլիպսաձև:



Նկ. 7



Նկ. 8



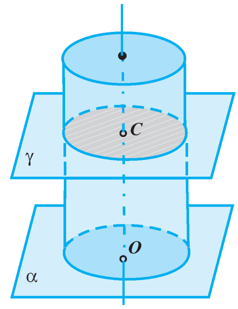
Նկ. 9

Դիցուք՝ $OABP$ ուղղանկյունը պտտվում է OP կողմն ընդգրկող առանցքի շուրջը (նկ. 7): Այդ դեպքում նրա OA և PB կողմերի պտտումից առաջանում են շրջաններ, որոնք կոչվում են *գլանի հիմքեր*: Այդ շրջաններն ընկած են նույն OP ուղղին ուղղահայաց հարթությունների մեջ, և, ուրեմն, իրար զուգահեռ են: Ուղղանկյան AB կողմի պտտումից առաջանում է տարածական մի պատկեր, որը կոչվում է *գլանի կողմնային մակերևույթ*: Այդ մակերևույթն առաջանում է (ծնվում է) նույն AB հատվածի պտույտի տարբեր դիրքեր ներկայացնող հատվածներից: Այդպիսի հատվածները կոչվում են *գլանի ծնորդներ*: Յուրաքանչյուր ծնորդ հավասար է և զուգահեռ $OABP$ ուղղանկյան OP կողմին: Ըստ հավասարության և զուգահեռության փոխանցականության՝ կարող ենք ասել, որ *գլանի ծնորդները միմյանց հավասար են և զուգահեռ*: Նկատենք, որ ծնորդները գլանի հիմքերի շրջանագծերի կետերը միացնող այն հատվածներն են, որոնք ուղղահայաց են հիմքերի հարթություններին:

Այսպիսով, գլանի մակերևույթը կազմված է երկու հիմքերի շրջաններից և կողմնային մակերևույթից: Հիմքերի շրջանների շառավիղները միմյանց հավասար են: Գլանի հիմքերի շառավիղներից յուրաքանչյուրը կոչվում է նաև *գլանի շառավիղ* (օրինակ՝OA կամ PB հատվածները նկ. 7-ում): Իսկ հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածը կոչվում է *գլանի բարձրություն* (PO-ն նկ. 7-ում): Հեշտ է նկատել, որ *գլանի բարձրությունը զուգահեռ է և հավասար նրա ցանկացած ծնորդին*:

Գլանը հարթությամբ հատելիս ստացվող հատույթը կախված է այն բանից, թե ինչպիսի դասավորություն ունի հատող հարթությունը գլանի առանցքի կամ հիմքերի նկատմամբ: Նկար 8-ում պատկերված են այդպիսի մի քանի հատույթներ: Մասնավորապես, եթե հարթությունն անցնում է գլանի առանցքով, ապա հատույթն ուղղանկյուն է, որի հանդիպակաց կողմերից երկուսը գլանի հիմքերի տրամագծեր են, իսկ մյուս երկուսը՝ գլանի ծնորդներ: Այդպիսի հատույթը կոչվում է *գլանի առանցքային հատույթ* (նկ. 9): Հեշտ է պատկերացնել նաև գլանի առանցքին զուգահեռ հարթությամբ առաջացած հատույթը: Այն նույնպես ուղղանկյուն է, որի հանդիպակաց կողմերից երկուսը գլանի ծնորդներ են, իսկ մյուս երկուսը՝ հիմքերի շրջանների լարեր (հաջորդ՝ 1.3 կետում դիտարկվում է այդպիսի հատույթի վերաբերյալ խնդիր, տե՛ս նկ. 12-ը):

Եթե հատող հարթությունն ուղղահայաց է գլանի առանցքին, ապա դժվար չէ համոզվել, որ հատույթը շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է առանցքի վրա, իսկ շառավիղը հավասար է գլանի շառավղին (նկ. 10): Կան նաև հատույթների ավելի բարդ դեպքեր, երբ հատող հարթությունը գլանի առանցքին ո՛չ ուղղահայաց է և ո՛չ էլ զուգահեռ:



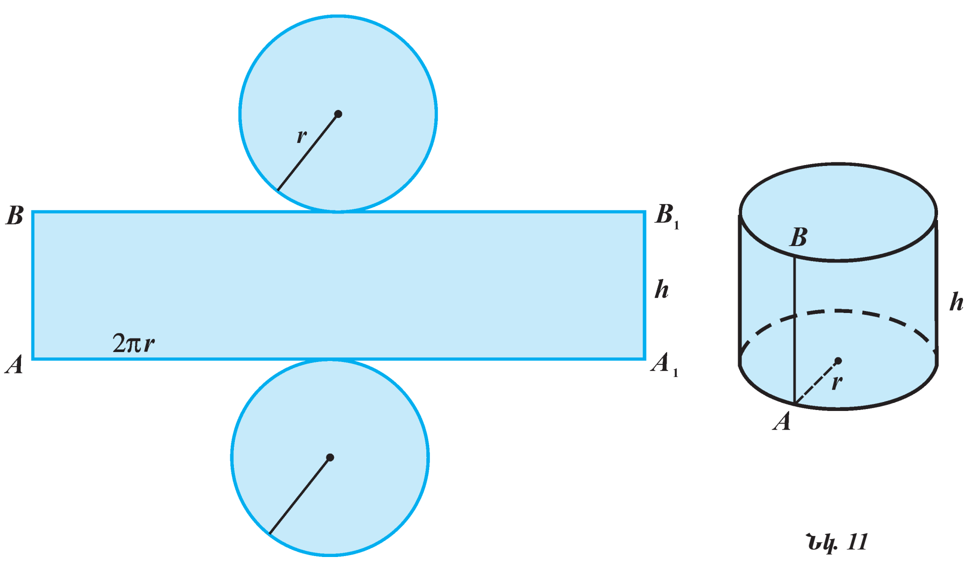
Նկ. 10

Պարզաբանման համար նշենք նաև այն, որ այստեղ նկարագրված մարմինը երկրաչափության մեջ անվանվում է *ուղիղ շրջանային գլան*: «Ուղիղ» բառը ցույց է տալիս, որ գլանի ծնորդներն ուղղահայաց են հիմքին, իսկ «շրջանային» բառը ցույց է տալիս, որ գլանի հիմքերը շրջաններ են: Հակիրճ արտահայտելու համար մենք «ուղիղ շրջանային» բառակապակցությունը բաց ենք թողնում և պարզապես ասում ենք *գլան*: Երկրաչափության մեջ, իհարկե, հետազոտվում են նաև այնպիսի գլաններ, որոնց հիմքերը շրջաններ չեն, կամ ծնորդները հիմքերին ուղղահայաց չեն, սակայն մենք մեր դասընթացում դրանք չենք ուսումնասիրի:

1.3. Գլանի մակերևույթի մակերեսը

Դուք, հավանաբար, նկատած կլինեք, թե թիթեղագործներն ինչպես են ուղղանկյունաձև մետաղաթիթեղից պատրաստում գլանաձև խողովակ: Այդ նույն եղանակով դուք կարող եք ուղղանկյունաձև թուղթը երկու հանդիպակաց եզրերից պտտել այնպես, որ այդ երկու եզրերը հպվեն իրար, և ստացվի գլանաձև մակերևույթ: Կատարելով հակառակ գործողությունը՝ կհամոզվենք, որ գլանի կողմնային մակերևույթը կարելի է փռել և ստանալ ուղղանկյուն:

Այժմ պատկերացնենք, որ գլանի մակերևույթը նախ կտրատել ենք հիմքերի շրջանագծերի երկայնքներով ու ծնորդներից մեկի՝ AB-ի երկայնքով և ապա փռել հարթության վրա: Նկար 11-ում պատկերված է գլանի մակերևույթի փռվածքը:



Նկ. 11

Այն կազմված է երկու շրջաններից և կողմնային մակերևույթի փռվածք հանդիսացող ուղղանկյունից:

Մենք գիտենք հաշվել ուղղանկյան և շրջանի մակերեսները: Հենց դրանց միջոցով էլ կկարողանանք հաշվել գլանի մակերևույթի մակերեսը:

Ստանանք գլանի մակերևույթի մակերեսի բանաձևը՝ արտահայտված գլանի r շառավիղով և h բարձրությամբ:

Գլանի կողմնային մակերևույթի փռվածքը ABB_1A_1 ուղղանկյունն է, որի մակերեսը, ինչպես գիտենք, հավասար է AB և AA_1 կից կողմերի արտադրյալին: Դժվար չէ նկատել, որ AB կողմը՝ որպես գլանի ծնորդ, հավասար է գլանի h բարձրությանը, իսկ AA_1 կողմը հավասար է գլանի հիմքի շրջանագծի երկարությանը, այսինքն $2\pi r$ է: Ուրեմն՝ գլանի կողմնային մակերևույթի $S_կ$ մակերեսը կարող ենք հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$S_կ=2\pi rh: \qquad (1)$$

Գլանի մակերևույթի $S_լ$ մակերեսը (հաճախ անվանում են նաև լրիվ մակերևույթի մակերես) ստանալու համար մնում է կողմնային մակերևույթի մակերեսին ավելացնել երկու հիմքերի մակերեսները, որոնցից յուրաքանչյուրը πr^2 է: Այսպիսով՝ $S_լ=S_կ+2S_հ=2\pi rh+2\pi r^2$: Այսինքն՝

$$S_լ= 2\pi r(r+h): \qquad (2)$$

Օգտվելով ստացած բանաձևերից՝ լուծենք երկու խնդիր:

Խնդիր 1. Գտնել այն գլանի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները, որի առանցքային հատույթը a կողմով քառակուսի է (այդպիսի գլանն անվանում են նաև *հավասարակողմ գլան*):

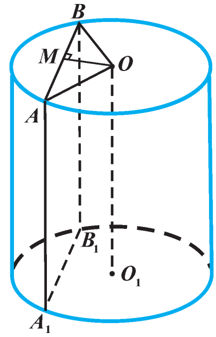
Լուծում. Գիտենք, որ ցանկացած գլանի առանցքային հատույթն ուղղանկյուն է, որի կից կողմերից մեկը գլանի ծնորդն է, մյուսը՝ հիմքի տրամագիծը (տե՛ս նկ. 9-ը): Քանի որ այդ հատույթը a կողմով քառակուսի է, ուրեմն՝ $h=2r=a$, որտեղ h-ը գլանի բարձրությունն է, r-ը՝ շառավիղը: Տեղադրելով $h=a$ և $r=\frac{a}{2}$ արժեքները (1) և (2) բանաձևերում՝ ստացվում է.

$$S_կ=2\pi rh=2\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\pi a^2,$$

$$S_լ=2\pi r(r+h)=2\pi\cdot\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right)=\frac{3}{2}\pi a^2:$$

Խնդիր 2. Գլանը, որի շառավիղը 5 սմ է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ 50π սմ^2, հատված է առանցքին զուգահեռ և նրանից 3 սմ հեռավորությամբ անցնող հարթությամբ: Գտնել ստացված հատույթի մակերեսը:

Լուծում. Գլանի առանցքին զուգահեռ հատույթն ուղղանկյուն է: Դիցուք՝ ABB_1A_1-ն այդ ուղղանկյունն է, որի կից կողմերից մեկը գլանի AA_1 ծնորդն է, իսկ մյուսը՝ հիմքի շրջանի AB լարը (նկ. 12): Որպեսզի պարզենք հատույթի հեռավորրությունը OO_1 առանցքից, O կետից տանենք AB-ին ուղղահայաց՝ OM-ը: Քանի որ ΔAOB-ն հավասարասրուն է ($OA=OB=r$, որտեղ r-ը հիմքի շառավիղն է), ուրեմն՝ OM-ը այդ եռանկյան նաև միջնագիծ է, այսինքն՝ $AB=2AM$:



Նկ. 12

ΔAOM-ից, օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից, գտնենք AM-ը: $AM=\sqrt{AO^2-OM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$(սմ):

Ուրեմն՝ $AB = 2\cdot4$ սմ $= 8$ սմ:

ABB_1A_1 ուղղանկյան AA_1 կողմը հավասար է գլանի բարձրությանը (այն նշանակենք h): Օգտվենք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսի բանաձևից. $S_կ=2\pi rh$, այսինքն՝ $50\pi=2\pi\cdot5\cdot h$, որտեղից ստանում ենք $h=5$ սմ:

Մնում է հաշվել հատույթի S մակերեսը. $S=AB\cdot AA_1=8$ սմ$\cdot5$ սմ$=40$ սմ^2:

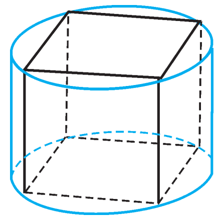
Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

1. M կետը գտնվում է a ուղղից 8 սմ հեռավորության վրա և պտտվում է նրա շուրջը: Գտեք այդ պտտումից առաջացած շրջանագծի երկարությունը:
2. a ուղիղն ուղղահայաց է AB հատվածին և անցնում է նրա A ծայրակետով: M-ը AB հատվածի միջնակետն է, և նրա հեռավորությունն a ուղղից 10 սմ է: Ի՞նչ պատկերներ են առաջանում a ուղղի շուրջը AM և MB հատվածների պտտումից: Գտեք ստացված այդ պատկերների մակերեսները:
3. Վերցված են երեք կետեր այնպես, որ նրանց յուրաքանչյուր երկուսի միջև հեռավորությունը 6 սմ է: Այդ կետերից մեկը պտտվում է մյուս երկուսով անցնող ուղղի շուրջը: Գտեք պտտումից առաջացած շրջանագծի երկարությունը:
4. Գլանի առանցքային հատույթը քառակուսի է: Գտեք գլանի շառավղի և ծնորդի երկարությունների հարաբերությունը:
5. Գլանի առանցքային հատույթը 80 սմ պարագծով ուղղանկյուն է, որի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Գտեք գլանի շառավիղը և բարձրությունը:
6. Որոշեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.
   ա) գլանի ցանկացած հատույթը կա՛մ շրջան է, կա՛մ ուղղանկյուն,
   բ) գլանի առանցքին զուգահեռ հատույթն ուղղահայաց է գլանի հիմքերին,
   գ) եթե ուղիղը զուգահեռ է գլանի առանցքին, ապա այն զուգահեռ է նաև գլանի ցանկացած ծնորդին,
   դ) եթե գլանի ծնորդը մեծ է հիմքի տրամագծից, ապա գլանի հատույթը քառակուսի լինել չի կարող:
7. Հնարավո՞ր է արդյոք գլան ստանալ մի այնպիսի պատկերի պտտումից, որն ուղղանկյուն չէ:
8. Ի՞նչ մարմին կառաջանա, եթե՝ **ա)** խորանարդը պտտենք նրա կողերից մեկի շուրջը, **բ)** գլանը պտտենք նրա ծնորդներից մեկի շուրջը:

9. *M*-ը և *N*-ը *ABCD* ուղղանկյան *AD* և *BC* հանդիպակաց կողմերի միջնակետերն են: Նկարագրեք այն պատկերը, որն առաջանում է *AB* առանցքի շուրջը *MNCD* ուղղանկյան պտտումից:
10. Դիցուք՝ r-ը, h-ը, $S_կ$-ն և $S_լ$-ն գլանի համապատասխանաբար շառավիղը, բարձրությունը, կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսներն են: Գտեք՝ **ա)** $S_կ$-ն և $S_լ$-ն, եթե r=7 սմ, h=8 սմ, **բ)** h-ը և $S_լ$-ն, եթե r=10 սմ և $S_կ$=120π սմ^2, **գ)** h-ը և $S_կ$-ն, եթե r=4 սմ, $S_լ$=64π սմ^2, **դ)** r-ը և h-ը, եթե $S_կ$=36π սմ^2, $S_լ$=54π սմ^2:
11. 12 սմ և 16 սմ կից կողմերով ուղղանկյունը պտտել են մեծ կողմի շուրջը և ստացել գլան: Գտեք այդ գլանի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:
12. Տրված է *h* բարձրություն և r շառավիղ ունեցող գլան: Նշեք, թե՝ **ա)** չփոփոխելով նրա շառավիղը՝ ինչպե՞ս պետք է փոփոխել նրա բարձրությունը, որպեսզի գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը կրկնապատկվի, **բ)** չփոփոխելով նրա բարձրությունը՝ ինչպե՞ս պետք է փոփոխել նրա շառավիղը, որպեսզի գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը փոքրանա երկու անգամ:
13. Գլանաձև խաղալիքի բարձրությունը 20 սմ է, շառավիղը՝ 10 սմ: Պարզեք, թե այդ խաղալիքի մակերևույթի մակերեսը մե՞ծ, թե՞ փոքր է, քան 18 դմ^2-ն:
14. 4 սմ և 2 սմ կից կողմերով ուղղանկյունը պտտել են մի դեպքում մեծ կողմի, երկրորդ դեպքում՝ փոքր կողմի շուրջը: Գտեք և համեմատեք ստացված երկու գլանների՝ **ա)** կողմնային մակերևույթների մակերեսները, **բ)** լրիվ մակերևույթների մակերեսները:
15. Որոշեք, թե ինչպիսի՞ բարձրություն է ունենալու գլանը, որպեսզի նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը երեք անգամ մեծ լինի հիմքերից մեկի մակերեսից:
16. Գլանաձև փակ ցիստեռնը, որի հիմքի շառավիղը 1 մ է, բարձրությունը՝ 2,5 մ, անհրաժեշտ է դրսից ամբողջությամբ ներկել: Դրա համար քանի՞ տուփ ներկ է հարկավոր, եթե հայտնի է, որ յուրաքանչյուր տուփ նախատեսված է 2 մ^2 մակերես ներկելու համար:
17. Ի՞նչ մակերեսով մետաղաթիթեղ է անհրաժեշտ, որպեսզի պատրաստեն 2 մ երկարությամբ և 20 սմ տրամագծով խողովակ, եթե կարերի համար հարկավոր է ավելացնել նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսի 2,5%-ը:
18. Թիթեղագործը 2 մ x 1 մ չափսի մետաղաթիթեղը բաժանում է չորս հավասար մասերի և յուրաքանչյուրից պատրաստում 1 մ երկարությամբ գլանաձև խողովակ, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր խողովակը պատրաստելիս թիթեղից 1սմ երկայնքով օգտագործում է եզրերը կարելու համար: Գտեք պատրաստված խողովակների տրամագիծը:

19. Գլանի բարձրությունը հավասար է 1: **ա)** Որոշեք, թե կարո՞ղ է այդպիսի գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը լինել 4π: **բ)** Ինչպիսի՞ արժեքներ կարող է ընդունել այդ մակերևույթի մակերեսը, երբ $r\in[1,2]$:

20. Նկար 13-ում պատկերված է խորանարդին արտագծած գլան (խորանարդի հիմքերը ներգծած են գլանի հիմքերի շրջանագծերին): Խորանարդի կողը հավասար է 1 դմ: Համեմատեք խորանարդի և գլանի լրիվ մակերևույթների մակերեսները:



Նկ. 13

21. Գլանի շառավիղը 5 սմ է, բարձրությունը՝ 8 սմ: Գտեք նրա առանցքին զուգահեռ այն հատույթի մակերեսը, որն առաջանում է առանցքից 3 սմ հեռավորությամբ անցնող հարթությամբ:

22. Գլանի առանցքին զուգահեռ հատույթը քառակուսի է: Գտեք այդ հատույթի հեռավորությունն առանցքից, եթե գլանի շառավիղը 10 սմ է, ծնորդը՝ 12 սմ:

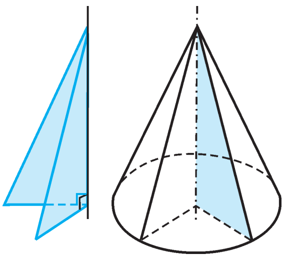
Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **10-րդ դասարանում դուք արդեն դիտարկել եք մի քանի բազմանիստերի, մասնավորապես՝ ուղղանկյունանիստի համաչափության տարրերը (համաչափության կենտրոնը, առանցքները, հարթությունները): Այժմ փորձեք բացահայտել գլանի համաչափության տարրերը (առանց ապացուցումների) և պատրաստել համապատասխան պաստառ:**

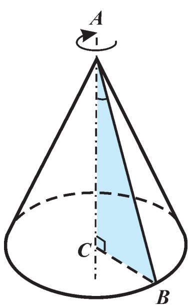
2. **Դիտարկվում է հիմքի 2 սմ շառավիղ և 10 սմ բարձրություն ունեցող գլան: Գլանի հիմքին զուգահեռ և նրանից x հեռավորությամբ տարված հարթությունը հատում է գլանը և այն տրոհում երկու գլանների: Այդ երկու գլանների կողմնային մակերևույթների մակերեսները ներկայացրեք x-ից կախված ֆունկցիաների տեսքով: Նույն կոորդինատային հարթության վրա կառուցեք այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Եթե ամեն ինչ ճիշտ կատարեք, ապա կպարզեք, որ այդ գրաֆիկներն ունեն հատման կետ: Երկրաչափական մեկնաբանություն տվեք այդ գրաֆիկների հատման կետի համար:**

§ 2 ԿՈՆ

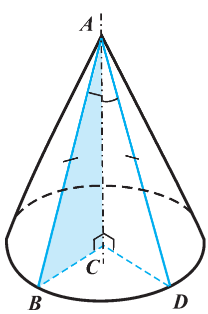
2.1. Կոնի հասկացությունը


Նկ. 14

Մյուս կլոր մարմինը, որ մենք ուսումնասիրելու ենք, ուղիղ շրջանային կոնն է, որին, ինչպես և գլանի դեպքում, հակիրճ կանվանենք պարզապես *կոն*: Կոնը պտտական մարմին է, այսինքն՝ այն նույնպես կարելի է ստանալ պտտման միջոցով: Այս դեպքում դիտարկվում է ուղղանկյուն եռանկյան պտույտը էջերից մեկի շուրջը (նկ. 14): Ավելի հանգամանորեն դիտարկենք կոնի ստացումը և ծանոթանանք նրա հետ կապված հասկացություններին. դրանք որոշակի նմանություններ ունեն գլանի հետ կապված հասկացությունների հետ:

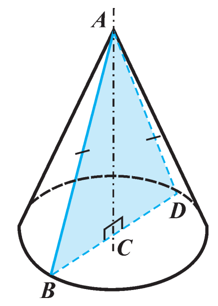

Նկ. 15

Դիցուք՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյունը պտտվում է AC էջն ընդգրկող առանցքի շուրջը (նկ. 15): Այդ դեպքում եռանկյան մյուս էջի՝ BC-ի պտտումից առաջանում է շրջան, որը կոչվում է *կոնի հիմք*: Այդ շրջանն ընկած է AC ուղղին ուղղահայաց հարթության մեջ, այսինքն՝ *կոնի առանցքն ուղղահայաց է հիմքին և անցնում է նրա կենտրոնով*: Եռանկյան AB ներքնաձիգի պտտումից առաջանում է տարածական մի պատկեր, որը կոչվում է *կոնի կողմնային մակերևույթ*: Առանցքի վրա գտնվող A կետը կոչվում է կոնի *գագաթ*: Կոնի կողմնային մակերևույթն առաջանում է կոնի գագաթը հիմքի շրջանագծի կետերին միացնող հատվածներից, որոնք կոչվում են *կոնի ծնորդներ*: Ծնորդները, փաստորեն, նույն AB հատվածի տարբեր դիրքերն են պտտման ընթացքում: Ուրեմն՝ *կոնի ծնորդները միմյանց հավասար են և կոնի առանցքի հետ կազմում են հավասար անկյուններ* (նկ. 16): Այսպիսով, կոնի մակերևույթը կազմված է հիմքի շրջանից և կողմնային մակերևույթից: Հիմքի շրջանի շառավիղը կոչվում է նաև *կոնի շառավիղ* (BC-ն կամ CD-ն նկ. 16-ում), իսկ կոնի գագաթը հիմքի կենտրոնին միացնող հատվածը՝ *կոնի բարձրություն* (AC հատվածը նկ. 16-ում):

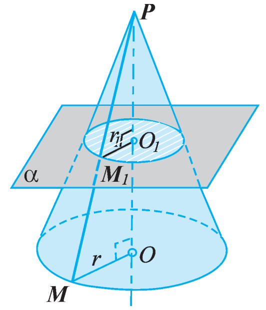

Նկ. 16

Եթե կոնի շառավիղը նշանակենք r, բարձրությունը՝ h, իսկ ծնորդը՝ ℓ, ապա դժվար չէ համոզվել, որ $r^2+h^2=\ell^2$ (դրա համար պետք է ABC ուղղանկյուն եռանկյան համար օգտվել Պյութագորասի թեորեմից, տե՛ս նկ. 16-ը): Դա նշանակում է, որ կոնի հետ կապված այդ երեք մեծություններից (շառավիղ, բարձրություն, ծնորդ) ցանկացած երկուսի միջոցով երրորդը միշտ կարող ենք գտնել:

Այժմ դիտարկենք կոնի հատույթները պարզ դեպքերում: Նկար 17-ում պատկերված է կոնի *առանցքային հատույթը*, այսինքն՝ այն հատույթը, որն առաջանում է կոնի առանցքով անցնող հարթությամբ: Հեշտ է նկատել, որ այդ հատույթը հավասարասրուն եռանկյուն է, որի սրունքները կոնի ծնորդներ են, իսկ հիմքը՝ կոնի հիմքի շրջանի տրամագիծ: Եթե հատող հարթությունն ուղղահայաց է կոնի առանցքին (այսինքն՝ զուգահեռ է հիմքին), ապա հատույթը շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է առանցքի վրա (նկ. 18): Ընդ որում՝ այդ շրջանի շառավիղի մեծությունը կախված է կոնի գագաթի և տվյալ հատույթի հեռավորությունից: Այսպես, եթե կոնի շառավիղը r է, բարձրությունը՝ h, ապա կոնի գագաթից h_1 հեռավորությամբ և առանցքին ուղղահայաց հատույթի շրջանի r_1 շառավիղի համար տեղի ունի $\frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{h}$ հավասարությունը: Դիտելով նկար 18-ը՝ հեշտ է համոզվել, որ այդ հավասարությունը անմիջապես հետևում է POM և PO_1M_1 ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունից (տե՛ս նաև Ա-1 խնդիրը):



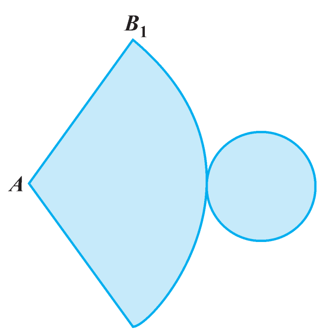
Նկ. 17



Նկ. 18

2.2. Կոնի մակերևույթի մակերեսը

Կոնի մակերևույթի մակերեսը որոշելու համար, ինչպես գլանի դեպքում, օգտվում ենք նրա փռվածքից: Պատկերացնենք, որ կոնի մակերևույթը նախ կտրատել ենք հիմքի շրջանագծի երկայնքով ու ծնորդներից մեկով և ապա փռել հարթության վրա (նկ. 19): Մակերևույթի փռվածքը կազմված է շրջանից (դա կոնի հիմքն է) և շրջանային սեկտորից: Այդ սեկտորը կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքն է: Նրա շառավիղը հավասար է կոնի ծնորդին (AB հատվածը նկ. 19-ում), իսկ աղեղի երկարությունը՝ կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը: Ուրեմն՝ եթե կոնի շառավիղը r է, ծնորդը՝ ℓ, ապա շրջանային սեկտորի շառավիղը հավասար կլինի ℓ, իսկ աղեղի



Նկ. 19

երկարությունը՝ $2\pi r$: Ինչպես գիտենք հարթաչափությունից, *շրջանային սեկտորի մակերեսը* հավասար է նրա շառավիղի և աղեղի երկարության արտադրյալի կեսին, այսինքն՝ հավասար է $\frac{2\pi r\cdot\ell}{2}$ կամ $\pi r\ell$: Այսպիսով, եթե կոնի մակերևույթի փռվածքի մակերեսն ընդունենք որպես նրա մակերևույթի $S_{\text{կ}}$ մակերես, ապա ստանում ենք հետևյալ բանաձևը.

$$S_{\text{կ}} = \pi r\ell: \qquad (3)$$

Կոնի լրիվ մակերևույթի $S_{\text{լ}}$ մակերեսը հաշվելու համար մնում է նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսին գումարել հիմքի πr^2 մակերեսը: Ստացվում է՝ $S_{\text{լ}}=S_{\text{հ}}+S_{\text{կ}}=\pi r^2+\pi r\ell$, այսինքն՝

$$S_{\text{լ}}=\pi r(r+\ell): \qquad (4):$$

Խնդիր. a=6 սմ և b=8 սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյունը պտտել են մի դեպքում մեծ, երկրորդ դեպքում՝ փոքր էջի շուրջը: Գտնել և համեմատել ստացված կոների կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

Լուծում. Երկու կոների համար էլ ծնորդը հավասար է տրված եռանկյան ներքնաձիգին (տե՛ս նկ. 16): Նախ գտնենք ծնորդը՝ օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից. $\ell=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36\text{սմ}^2+64\text{սմ}^2}=10\text{սմ}$:

Օգտվելով (3) և (4) բանաձևերից՝ հաշվենք յուրաքանչյուր կոնի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

1-ին կոնի համար $r = a =$ 6 սմ, ℓ=10 սմ: Ուրեմն՝

$$S_{\text{կ}}=\pi r\ell=\pi\cdot 6\text{ սմ}\cdot 10\text{ սմ}=60\pi\text{ սմ}^2,$$

$$S_{\text{լ}}=\pi r(r+\ell)=\pi\cdot 6\text{ սմ }(6\text{ սմ}+10\text{ սմ}) = 96\pi\text{ սմ}^2:$$

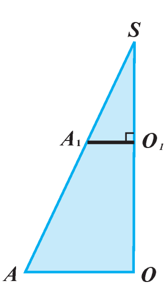
2-րդ կոնի համար $r=b$=8 սմ, ℓ=10 սմ: Ուրեմն՝

$$S_{\text{կ}}=\pi r\ell=\pi\cdot 8\text{ սմ}\cdot 10\text{ սմ}=80\pi\text{ սմ}^2:$$

$$S_{\text{լ}}=\pi r(r+\ell)=\pi\cdot 8\text{ սմ}(8\text{ սմ}+10\text{ սմ})=144\pi\text{ սմ}^2:$$

Համեմատելով ստացված մեծությունները՝ տեսնում ենք, որ առաջին դեպքում (մեծ էջի շուրջը պտտումից) առաջացած կոնի և՛ կողմնային, և՛ լրիվ մակերևույթների մակերեսներն ավելի փոքր են, քան երկրորդ դեպքում ստացված կոնինը:

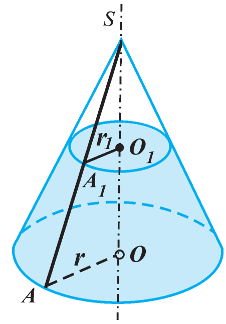
2.3. Հատած կոն



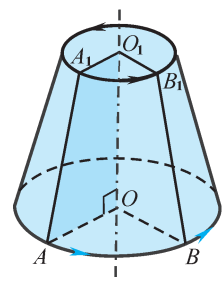
Նկ. 20

Վերցնենք կամայական SOA ուղղանկյուն եռանկյուն և տանենք SO էջին ուղղահայաց և ներքնաձիգը հատող որևէ A_1O_1 հատված (նկ. 20): Եռանկյունը տրոհվում է երկու մասի, որոնցից մեկն ուղղանկյուն եռանկյուն է (ΔSO_1A_1-ը), իսկ մյուսը՝ ուղղանկյուն սեղան (OAA_1O_1-ը): Այժմ պատկերացնենք այն մարմինները, որոնք առաջանում են SO առանցքի շուրջն այդ պատկերների (եռանկյունների և սեղանի) պտտումից (նկ. 21):

SOA եռանկյան պտտումից առաջանում է կոն, որի համար S-ը գագաթ է, OA-ն՝ շառավիղ, SA-ն՝ ծնորդ: Կոն է առաջանում նաև SO_1A_1 եռանկյան պտտումից, որի համար O_1A_1-ը շառավիղ է, SA_1-ը՝ ծնորդ, իսկ գագաթը նույն S կետն է: Նկատենք, որ երկրորդ կոնն առաջինի մի մասն է, և նրա հիմքը ներկայացնում է առաջին կոնի առանցքին ուղղահայաց հատույթ: Մեզ մնում է դիտարկել այն մարմինը, որն առաջանում է OAA_1O_1 սեղանի պտտումից: Այդ մարմինը կարելի է պատկերացնել որպես առաջին կոնի այն մասը, որն ստացվում է, երբ նրանից զատվում է երկրորդ կոնը: Այդպիսի մարմինները կանվանենք *հատված կոն* (նկ. 22): Հատած կոնի մակերևույթը կազմված է ուղղանկյուն սեղանի հիմքերի պտտումից առաջացած շրջաններից և սեղանի մեծ սրունքի պտտումից առաջացած մակերևույթից: Այդ շրջանները կոչվում են *հատած կոնի հիմքեր*, իսկ սրունքի պտտումից առաջացած մակերևույթը՝ *հատած կոնի կողմնային մակերևույթ*: Առաջին կոնի ծնորդների այն հատվածները, որոնց ծայրակետը գտնվում են հատած կոնի հիմքերի շրջանագծերի վրա, կոչվում են *հատած կոնի ծնորդներ* (AA_1, BB_1 հատվածները նկ. 22-ում), իսկ հիմքերի O և O_1 կենտրոնները միացնող հատվածը կոչվում է *հատած կոնի բարձրություն*:



Նկ. 21



Նկ. 22

Որպեսզի հաշվենք հատած կոնի մակերևույթի մակերեսը, պետք է նրա հիմքերի մակերեսներին գումարենք կողմնային մակերևույթի մակերեսը: Եթե մեզ հայտնի են հիմքերի շրջանների շառավիղները, ապա դրանց մակերեսները հաշվելը դժվար խնդիր չէ: Մնում է պարզել, թե ինչպես հաշվել կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

Մենք արդեն գիտենք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի բանաձևը: Ուրեմն՝ հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը կարող ենք հաշվել որպես երկու (սկզբնական և նրանից զատված) կոների կողմնային մակերևույթների մակերեսների տարբերություն: Եթե հատած կոնի հիմքերի շառավիղները հավասար են r և r_1, իսկ ծնորդը՝ ℓ, ապա որոշ արտածումներ կատարելով՝ նրա կողմնային մակերևույթի $S_կ$ մակերեսի համար ստացվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$S_կ=\pi(r+r_1)\ell: \qquad (5)$$

Հետաքրքրվողները կարող են այս բանաձևի արտածումը գտնել Ա-2 խնդրի լուծման մեջ: Մեզ մնում է նկատել, որ (5) բանաձևում $\pi(r+r_1)$ արտադրիչը ներկայացնում է հատած կոնի հիմքերի շրջանագծերի երկարությունների կիսագումարը (հիշենք, որ *r* շառավիղով շրջանագծի երկարությունը $2\pi r$ է): Ուրեմն՝ կարող ենք ձևակերպել.

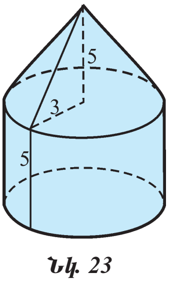
Հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքերի շրջանագծերի երկարությունների կիսագումարի և ծնորդի արտադրյալին:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

23. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունը պտտվում է էջերից մեկի շուրջը: Գտեք առաջացած կոնի բարձրությունը և ծնորդը, եթե նրա շառավիղը 2 սմ է:
24. Կոնի առանցքային հատույթը 24 սմ պարագծով հավասարակողմ եռանկյուն է: Գտեք այդ կոնի շառավիղը, ծնորդը և բարձրությունը:
25. Կոնի առանցքային հատույթը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնաձիգը 18 սմ է: Գտեք այդ կոնի շառավիղը, բարձրությունը և ծնորդը:
26. Նկարագրեք այն մարմինը, որն առաջանում է ուղղանկյուն եռանկյան՝ ներքնաձիգի շուրջը պտտումից:
27. Նկարագրեք այն մարմինը, որն առաջանում է, երբ ուղղանկյուն սեղանը պտտում ենք՝ **ա)** մեծ հիմքի շուրջը, **բ)** փոքր հիմքի շուրջը:
28. Նկարով արտահայտեք հետևյալ պատկերները՝
    ա) քառանկյուն բուրգի և կոնի գագաթները համընկնում են, իսկ բուրգի հիմքի քառանկյունը ներգծած է կոնի հիմքի շրջանագծին (կոնին ներգծած բուրգ),
    բ) եռանկյուն բուրգի և կոնի գագաթները համընկնում են, իսկ բուրգի հիմքի եռանկյունն արտագծած է կոնի հիմքի շրջանագծին (կոնին արտագծած բուրգ):
29. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ պատասխանեք հետևյալ հարցերին.
    ա) հնարավո՞ր է արդյոք ցանկացած եռանկյուն բուրգին ներգծել և արտագծել կոն,
    բ) հնարավո՞ր է արդյոք ցանկացած քառանկյուն բուրգին ներգծել կամ արտագծել կոն:
30. Որոշեք հետևյալ դատողության ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.
    ա) կոնի ցանկացած հատույթը կա՛մ շրջան է, կա՛մ եռանկյուն,
    բ) կոնի գագաթով անցնող ցանկացած հատույթը հավասարասրուն եռանկյուն է,
    գ) եթե կոնի ծնորդը մեծ է հիմքի տրամագծից, ապա կոնի հատույթը հավասարակողմ եռանկյուն լինել չի կարող,
    դ) եթե երկու կոների առանցքային հատույթները հավասար եռանկյուններ են, ապա դրանց շառավիղները, ծնորդները և բարձրությունները համապատասխանաբար հավասար են:
31. Հնարավո՞ր է արդյոք կոն ստանալ մի այնպիսի պատկերի պտտումից, որն ուղղանկյուն եռանկյուն չէ:
32. Ի՞նչ մարմին կառաջանա, եթե բուրգը պտտենք նրա բարձրությունն ընդգրկող ուղղի շուրջը:
33. Դիցուք՝ r-ը, ℓ-ը, $S_կ$-ն և $S_լ$-ն կոնի համապատասխանաբար շառավիղը,

ծնորդը, կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսներն են: Գտեք՝ **ա)** $S_կ$-ն և $S_լ$-ն, եթե r=6 սմ, ℓ=9 սմ, **բ)** ℓ-ը և $S_լ$-ն, եթե r=4 սմ, $S_կ=24\pi$ սմ^2, **գ)** ℓ-ը և $S_կ$-ն, եթե r=5 սմ, $S_լ=60\pi$ սմ^2, **դ)** r-ը և ℓ-ը, եթե $S_կ=6\pi$ դմ^2, $S_լ=10\pi$ դմ^2:

34. 5 սմ և 12 սմ էջեր ունեցող ուղղանկյուն եռանկյունը պտտել են փոքր էջի շուրջը: Գտեք ստացված կոնի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:
35. Կոնի գագաթով անցնող հատույթը 18 սմ^2 մակերեսով ուղղանկյուն եռանկյուն է, իսկ ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է 30^o-ի անկյուն: Գտեք կոնի հիմքի մակերեսը: Պարզեք, թե այդ հատույթն արդյո՞ք կոնի առանցքային հատույթ է (պատասխանը հիմնավորեք):
36. Կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը 28π սմ^2 է, իսկ նրա կողմնային մակերևույթի փռվածքը շրջանային սեկտոր է, որի աղեղը 60^o է: Գտեք կոնի շառավիղը և ծնորդը:
37. Աշակերտները թղթից պատրաստեցին մի կոն և պարզեցին, որ նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը կարող են հաշվել $S_կ = \dfrac{\pi\ell^2}{6}$ բանաձևով, որտեղ ℓ-ը կոնի ծնորդն է: Գտեք կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը ներկայացնող շրջանային սեկտորի աղեղի աստիճանային մեծությունը:
38. Թանգարանն ունի կոնաձև գմբեթ, որի առանցքային հատույթը 6 մ կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է: Հաշվեք գմբեթի մակերևույթի մակերեսը:
39. 15 սմ և 20 սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյունը պտտում են ներքնաձիգի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:
40. Կոնի ծնորդը 2 սմ է, շառավիղը՝ 1 սմ: Պարզեք, թե այդ կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը մե՞ծ, թե՞ փոքր է, քան 9 սմ^2-ն:
41. Հատած կոնի հիմքերը 1 սմ և 4 սմ շառավիղով շրջաններ են, իսկ ծնորդը մեծ հիմքի հարթության հետ կազմում է 60^o անկյուն: Գտեք հատած կոնի առանցքային հատույթի պարագիծը:
42. Հատած կոնի մի հիմքի շառավիղը մյուս հիմքի շառավիղից մեծ է 6 սմ-ով, իսկ ծնորդը 10 սմ է: Գտեք հատած կոնի բարձրությունը:
43. Հատած կոնի հիմքերի շառավիղները 3 սմ և 5 սմ են: Գտեք նրա առանցքին ուղղահայաց և բարձրության միջնակետով անցնող հարթությամբ առաջացած հատույթի մակերեսը:
44. Նկար 23-ում պատկերված է 5 սմ բարձրություն ունեցող կոն, որի հիմքը տեղադրված է մի այնպիսի գլանի հիմքի վրա, որի շառավիղը 3 սմ է, բարձրությունը՝ նույնպես 5 սմ: Գտեք այդ մարմնի մակերևույթի մակերեսը:



Նկ. 23

45. Դիտարկվում է կոն, որի ծնորդը 25 սմ է, շառավիղը՝ 15 սմ: Ծնորդի վրա վերցված է մի կետ, որի հեռավորությունը կոնի գագաթից 5 սմ է: Այդ կետով տարված է կոնի հիմքին

զուգահեռ հատույթ: Գտեք՝ **ա)** այդ հատույթի մակերեսը, **բ)** տրված կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, **գ)** հատույթով անջատված կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, **դ)** ստացված հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, **ե)** ստացված հատած կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

46. $ABCD$ ուղղանկյուն սեղանի BC և AD հիմքերը 1 սմ և 5 սմ են, իսկ AB փոքր սրունքը՝ 3 սմ: Այդ սեղանը պտտում են AB ուղղի շուրջը: Գտեք՝ **ա)** CD-ն, **բ)** KC-ն, որտեղ K-ն AB և CD ուղիղների հատման կետն է, **գ)** սեղանի պտտումից առաջացած մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

47. Դույլն ունի 10 սմ և 15 սմ հիմքերի շառավիղներով հատած կոնի ձև, որի ծնորդը 30 սմ է: Որքա՞ն ներկ է հարկավոր այդպիսի 100 դույլ ներսից ու դրսից ներկելու համար, եթե 1 մ^2-ի համար պահանջվում է 150 գ ներկ (դույլի պատերի հաստությունը հաշվի չառնել):

48*. Կոնի ծնորդի երկարությունը 2 է: Կարո՞ղ է արդյոք նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը հավասար լինել 3π-ի: Ի՞նչ արժեքներ կարող է ընդունել այդ կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, երբ նրա r շառավիղի համար տեղի ունենա՝ **ա)** $r\in[1, \ 1{,}5]$, **բ)** $r\in[2{,}4]$ պայմանը:

49. Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը շրջանային սեկտոր է, որի անկյունը 30° է, շառավիղը՝ 2 սմ: Գտեք այդ կոնի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

50*. Կոնի բարձրությունը հավասար է 3-ի, շառավիղը՝ 5-ի: Նրա գագաթով տարված է հատույթ: Այդ հատույթը հատում է կոնի հիմքը մի լարով, որը հիմքի կենտրոնից ունի x հեռավորություն: Հատույթի մակերեսը ներկայացրեք որպես x-ից կախված ֆունկցիա:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Քանի՞ ընդհանուր կետ կարող են ունենալ ուղիղը և կոնի մակերևույթը: Դիտարկեք դրանց փոխդասավորության բոլոր հնարավոր դեպքերը, դասակարգեք և ներկայացրեք գծապատկերով:**

2. **Պատկերացրեք, որ կոնը «գցել են» հորիզոնական հարթության վրա այնպես, որ կոնի կողմնային մակերևույթը ծնորդի երկայնքով հպվում (շոշափում) է հարթությանը: Կոնի գագաթն ամրացվում է, և կոնը հարթության վրա գլորվում է՝ կատարելով լրիվ պտույտ գագաթի շուրջը: Նկարագրեք, թե ինչպիսի՞ մարմին է առաջանում կոնի այդ պտույտից: Իսկ ի՞նչ մակերևույթ է առաջանում կոնի բարձրության պտույտից:**

§ 3 ԳՈՒՆԴ

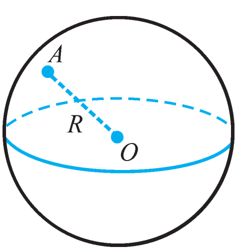
3.1. Գնդային մակերևույթի և գնդի հասկացությունները

Դուք, հավանաբար, հիշում եք երկրաչափության դասընթացում (7-րդ դասարանում) առաջին անգամ բերված սահմանումներից մեկը՝ շրջանագծի սահմանումը: Այն ձևակերպվում էր այսպես. *շրջանագիծ է կոչվում այն երկրաչափական պատկերը, որը կազմված է հարթության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորության վրա:* Եթե այս սահմանման մեջ «հարթություն» բառը փոխարինենք «տարածություն» բառով, կստանանք *գնդային մակերևույթի** սահմանումը: Այսինքն՝ *գնդային մակերևույթ կոչվում է այն երկրաչափական պատկերը, որը կազմված է տարածության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորության վրա*:

Համանման են նաև շրջանի և գնդի սահմանումները: Ինչպես որ շրջանը հարթության այն մասն է, որը սահմանափակված է շրջանագծով, այնպես էլ գունդը տարածության այն մասն է, որը սահմանափակված է գնդային մակերևույթով: Գունդը կարող ենք սահմանել նաև այսպես. *գունդ կոչվում է այն երկրաչափական մարմինը, որը կազմված է տարածության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորությունը չգերազանցող հեռավորության վրա:*

Նման են նաև շրջանի ու գնդի հետ կապված մյուս հասկացությունները: Այսպես, տրված կետը կոչվում է գնդային մակերևույթի (նաև գնդի) *կենտրոն* (O կետը նկ. 24-ում), տրված հեռավորությունը՝ *գնդային մակերևույթի* (նաև գնդի) *շառավիղ*: Շառավիղ կանվանենք նաև կենտրոնը գնդային մակերևույթի կամայական կետին միացնող հատվածը (OA հատվածը նկ. 24-ում): *Գնդային մակերևույթի (գնդի) տրամագիծ* կոչվում է այդ մակերևույթի երկու կետերը միացնող այն հատվածը, որն անցնում է նրա կենտրոնով: Ակնհայտ է, որ տրված գնդային մակերևույթի բոլոր շառավիղները միմյանց հավասար են, և եթե շառավիղը նշանակենք R-ով, ապա տրամագիծը հավասար կլինի $2R$-ի:

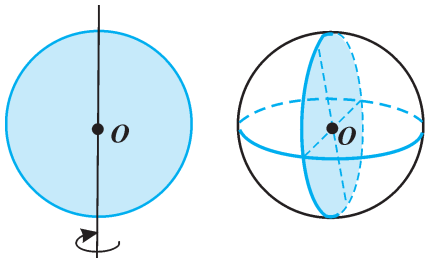
Քանի որ շրջանագծի բոլոր կետերը հավասարահեռ են կենտրոնից, ուրեմն՝ եթե այն պտտենք որևէ տրամագծով անցնող առանցքի շուրջ, ապա առաջացած մակերևույթի բոլոր կետերը նույնպես հավասարահեռ կլինեն նրա կենտրոնից: Այսինքն՝ գնդային մակերևույթ կարելի է ստանալ՝ պտտելով շրջանագիծը նրա որևէ տրամագծի շուրջը: Իսկ եթե տրամագծի շուրջը պտտենք շրջանը, ապա կառաջանա գունդ (նկ. 25): Նաև նկատենք, որ գնդային մակերևույթ և



Նկ. 24

---

* Օգտագործվում են գնդային մակերևույթի այլ անվանումներ ևս, ինչպես, օրինակ՝ *սֆերա, գնդոլորտ* (որոշ դեպքերում՝ նաև *գնդերես*):

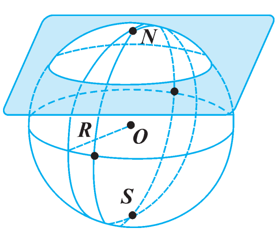


Նկ. 25

գունդ կարելի է ստանալ՝ տրամագծի շուրջը պտտելով համապատասխանաբար կիսաշրջանագիծը և կիսաշրջանը: Եվ դա հեշտ է պատկերացնել, քանի որ շրջանագծի և շրջանի համար, ինչպես գիտենք, յուրաքանչյուր տրամագիծ համաչափության առանցք է: Հետևաբար, կիսաշրջանը մեկ լրիվ պտույտի ընթացքում, պատկերավոր ասած, «լրացնում է» բոլոր այն կետերի բազմությունը, ինչն անում է շրջանը կես պտույտի ընթացքում: Այսինքն՝ կիսաշրջանի մեկ լրիվ պտույտի ընթացքում ստացված գունդը կստացվեր շրջանի կես պտույտի ընթացքում:

3.2. Գնդային մակերևույթի հատումը հարթությամբ

Նկ. 26



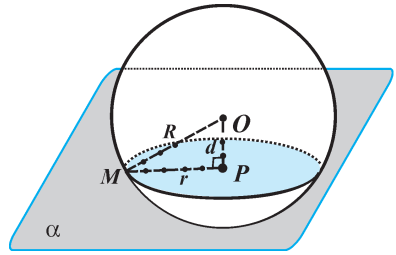
Նկ. 27

Գնդաձև առարկաների դուք հանդիպել եք դեռևս մանկության տարիներին: Իսկ գնդային մակերևույթի և գնդի մասին ավելի հիմնավոր ծանոթություններ եք ստացել հատկապես աշխարհագրության դասերին, երբ դիտարկել եք գլոբուսը (նկ. 26): Դուք արդեն պատկերացնում եք, որ եթե գունդը հատվում է հարթությամբ, ապա հատույթը կլինի շրջան: Նմանապես, եթե հարթությամբ հատվում է գնդային մակերևույթը, ապա հատույթում կստացվի շրջանագիծ (տե՛ս Ա-3 խնդիրը): Այդպիսի շրջանագծեր են, օրինակ, գլոբուսի վրա պատկերված *զուգահեռականները*: Ընդ որում՝ հատույթի շրջանագծի երկարությունը կլինի մեծագույն, երբ հատող հարթությունն անցնում է գնդի կենտրոնով: Գնդի կենտրոնով անցնող հատույթը կոչվում է *մեծ շրջան*, իսկ դրա շրջանագիծը՝ *մեծ շրջանագիծ*: Մեծ շրջանագծի օրինակ է *հասարակածը*: Նկար 27-ում պատկերված են մի քանի մեծ շրջանագծեր:

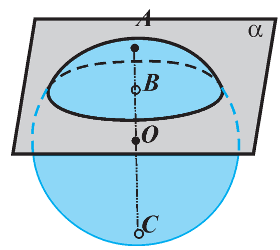
Գլոբուսի վրա նշվում են երկու կարևոր կետեր՝ Հյուսիսային և Հարավային բևեռները (տե՛ս նկ. 26 և 27): Այդ կետերը տրամագծորեն հակադիր կետեր են, այսինքն՝ դրանք գնդի նույն տրամագծի տարբեր ծայրակետերն են: Ձեզ հայտնի է, որ երկու բևեռով անցնող կիսաշրջանագծերը կոչվում են *միջօրեականներ*: Իսկ բևեռները միացնող տրամագծին ուղղահայաց հարթություններով առաջացող շրջանագծերը զուգահեռականներն են (այդ թվում և հասարակածը):

Հարթության և գնդային մակերևույթի հատումից առաջացած շրջանագծի շառավիղի մեծությունը կախված է հատող հարթության և գնդի կենտրոնի միջև եղած հեռավորությունից:

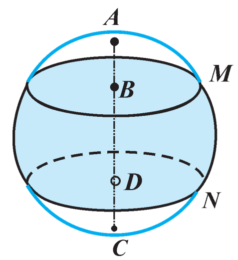
Իսկապես, դիտարկենք R շառավիղով գնդային մակերևույթ, որը հատվում է նրա կենտրոնից d հեռավորություն ունեցող հարթությամբ (նկ. 28): Ակնհայտ է, որ եթե հարթությունը հատում է գնդային մակերևույթը, ապա $d<R$: Դիցուք՝ գնդի O կենտրոնից հատող հարթությանն իջեցրած ուղղահայացի հիմքը P կետն է, այսինքն՝ $d=OP$: Վերցնենք հատույթի կամայական M կետ: Քանի որ M-ը միաժամանակ գտնվում է գնդային մակերևույթի վրա, ուրեմն $OM=R$: OPM ուղղանկյուն եռանկյան համար, ըստ Պյութագորասի թեորեմի, ստանում ենք $PM=\sqrt{R^2-d^2}$: Ստացվում է, որ հատույթի կամայական կետը P կետից ունի նույն $\sqrt{R^2-d^2}$ հեռավորությունը: Դա նշանակում է, որ P-ն հատույթի շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ նրա շառավիղը որոշվում է $r=\sqrt{R^2-d^2}$ բանաձևով: Այժմ ավելի տեսանելի է դառնում հատույթի r շառավիղի կապը գնդի կենտրոնի և հատող հարթության d հեռավորության հետ: Նկատենք, որ մեծ շրջանագծի դեպքում (երբ $d = 0$) նրա շառավիղը հավասար է գնդի շառավիղին:



Նկ. 28



Նկ. 29

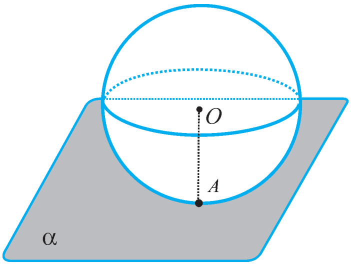


Նկ. 30

Գնդային մակերևույթը հարթությամբ հատելիս տրոհվում է երկու մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է *սեգմենտային մակերևույթ* (նկ. 29): Իսկ երբ գնդային մակերևույթը հատում են երկու զուգահեռ հարթություններ, ապա դրանց միջև պարփակված մակերևույթի մասը կոչվում է *գնդային մակերևույթի գոտի* (նկ. 30): Աշխարհագրական գոտիներ հասկացության հիմքում, ի վերջո, ընկած է հենց գնդային մակերևույթի գոտու հասկացությունը: Նկատենք նաև, որ սեգմենտային մակերևույթը և գնդային գոտին նույնպես կարող են ստացվել պտտման միջոցով: Օրինակ, դիտելով նկար 30-ը՝ դժվար չէ համոզվել, որ AC տրամագծի շուրջը AM և CN աղեղների պտտումից առաջանում են սեգմենտային մակերևույթներ, իսկ MN աղեղի պտտումից՝ գնդային մակերևույթի գոտի:

3.3. Գնդային մակերևույթը շոշափող հարթություն

Տարածության մեջ գնդային մակերևույթի և հարթության փոխդասավորության դեպքերը համանման են հարթության վրա շրջանագծի և ուղղի փոխդասավորության դեպքերին: Ինչպես գիտենք, շրջանագծի և ուղղի փոխդասավորության հնարավոր դեպքերից մեկն այն է, որ դրանք ունենում են միայն մեկ ընդհանուր կետ: Այդ դեպքում ասում ենք, որ ուղիղը շոշափում է շրջանագիծը (կամ՝ ու-

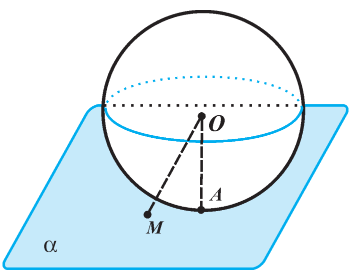


Նկ. 31

դիրը և շրջանագիծը շոշափում են իրար): Դրան համանման, եթե գնդային մակերևույթն ու հարթությունն ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, ապա կասենք, որ *հարթությունը շոշափում է գնդային մակերևույթը*, կամ՝ *գնդային մակերևույթը և հարթությունը շոշափում են իրար* (նկ. 31): Նրանց ընդհանուր կետը կոչվում է *շոշափման կետ* (A կետը նկ. 31-ում): Հասկանալի է, որ գնդային մակերևույթը շոշափող հարթությունը միայն մեկ ընդհանուր կետ կունենա նաև տվյալ մակերևույթով սահմանափակված գնդի հետ նույնպես: Դրա համար էլ այդ դեպքում ասում են նաև, որ *հարթությունը շոշափում է գունդը*:

Գնդային մակերևույթի և հարթության փոխդասավորության այս դեպքի վերաբերյալ կարևոր են հետևյալ երկու պնդումները:

Եթե հարթությունն անցնում է գնդային մակերևույթի շառավիղի ծայրակետով և ուղղահայաց է այդ շառավիղին, ապա այն շոշափում է գնդային մակերևույթը:



Նկ. 32

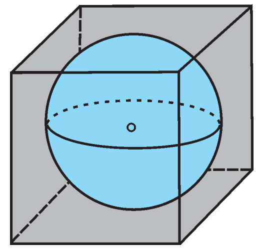
Այս պնդումը կարող ենք հիմնավորել հետևյալ կերպ: Դիցուք՝ α հարթությունն անցնում է O կենտրոնն ունեցող գնդի OA շառավիղի A ծայրակետով և $OA\perp\alpha$ (նկ. 32): Եթե α հարթության մեջ վերցնենք A կետից տարբեր կամայական M կետ, ապա OM-ը կլինի α հարթությանը տարված թեք, որը մեծ է OA ուղղահայացից՝ $OM > OA$: Ստացվում է, որ α հարթության կամայական կետը, բացի A կետից, գնդի կենտրոնից ունի ավելի մեծ հեռավորություն, քան շառավիղը, այսինքն՝ այն չի գտնվում գնդային մակերևույթի վրա: Հետևաբար, A-ն միակ կետն է, որ միաժամանակ գտնվում է և՛ գնդային մակերևույթի, և՛ α հարթության մեջ: Ուրեմն՝ α-ն տրված գնդային մակերևույթը շոշափող հարթություն է:

Մյուս պնդումն արտահայտում է *շոշափող հարթության հատկությունը:*

Գնդային մակերևույթի շոշափող հարթությունն ուղղահայաց է շոշափման կետից տարված շառավիղին:

Այս հատկությունը կարող ենք հիմնավորել այսպիսի դատողություններով: Դիցուք՝ α-ն O կենտրոնով գնդային մակերևույթի շոշափող հարթություն է, իսկ A-ն՝ շոշափման կետը: Եթե α հարթության մեջ վերցնենք A կետից տարբեր կամայական M կետ (տե՛ս նկ. 32-ը), ապա M-ը կգտնվի գնդից դուրս (քանի որ գունդը և α հարթությունը A կետից բացի ուրիշ ընդհանուր կետեր չունեն): Ուրեմն՝ OM հատվածը մեծ է OA շառավիղից՝ $OM>OA$: Ստացվում է, որ O կետը α հարթության կետերի հետ միացնող հատվածներից փոքրագույնը OA հատվածն է: Իսկ մենք գիտենք, որ այդպիսի հատվածներից փոքրագույնը լինելու հատկությամբ օժտված է միայն կետից հարթությանն իջեցրած ուղղահայացը: Այսպիսով՝ $OA \perp \alpha$:

Նկատենք, որ գնդային մակերևույթը շոշափող հարթությանը վերաբերող այս հատկությունը նույնպես համանման է շրջանագծի շոշափողի հատկությանը:

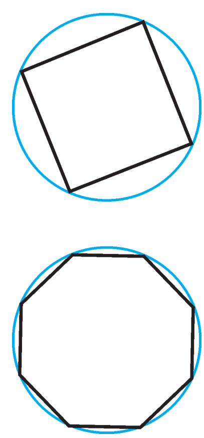


Նկ. 33

Գնդային մակերևույթը շոշափող հարթության հասկացության հիման վրա ներմուծվում է գնդային մակերևույթին արտագծյալ բազմանիստի հասկացությունը: Նկար 33-ում պատկերված է գնդային մակերևույթին արտագծած խորանարդ: Այդ խորանարդի յուրաքանչյուր նիստը շոշափում է գնդային մակերևույթը: Այսինքն՝ տվյալ բազմանիստի յուրաքանչյուր նիստով անցնող հարթությունը գնդային մակերևույթը շոշափող հարթություն է, ընդ որում՝ շոշափման կետը գտնվում է նիստի վրա: Դիտարկվում են նաև գնդային մակերևույթին արտագծյալ գլան և կոն: Դրանց մենք կանդրադառնանք հետագայում:

3.4. Գնդային մակերևույթի մակերեսը

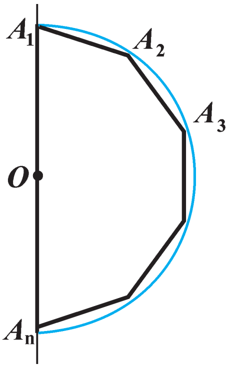
Պարզվում է, որ ի տարբերություն գլանի և կոնի մակերևույթների՝ գնդային մակերևույթը հնարավոր չէ փռել այնպես, որպեսզի ստացվի հարթ պատկեր: Այդ պատճառով գնդային մակերևույթի մակերեսը սահմանելու և այնուհետև հաշվելու համար չենք կարող օգտվել փռվածք ստանալու եղանակից: Այստեղ անհրաժեշտ են այլ մոտեցումներ ու հնարներ:



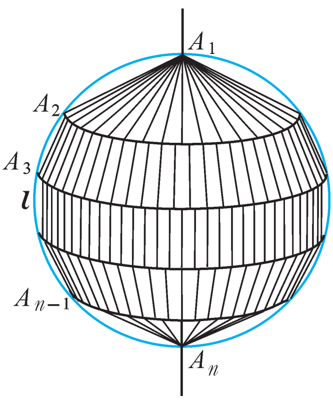
Հիշենք, թե ինչպես վարվեցինք շրջանագծի երկարությունը կամ շրջանի մակերեսը հաշվելիս: Մենք շրջանագծին ներգծեցինք կանոնավոր բազմանկյուն, որի պարագիծը դիտեցինք որպես շրջանագծի երկարության մոտավոր արժեք (նկ. 34): Եվ որքան մեծ էր բազմանկյան կողմերի թիվը, այնքան ավելի ճշգրիտ էր այդ մոտավոր արժեքը: Այնուհետև պատկերացրեցինք, որ այդպիսի բազմանկյան կողմերի թիվը շարունակաբար կրկնապատկվում է: Եվ երբ շարունակական կրկնապատկումների թիվն անսահմանափակ մեծանում է, ստացված ներգծյալ բազմանկյան պարագիծը «ձգտում է» շրջանագծի երկարությանը: Նույն ձևով ստացված բազմանկյան մակերեսը ձգտում է շրջանի մակերեսին: Այսինքն՝ որպես շրջանի մակերես է ընդունվում նրան ներգծած կանոնավոր բազմանկյունների մակերեսների հաջորդականության սահմանը, երբ բազմանկյան կողմերի թիվն անսահմանափակ մեծանում է:

Նկ. 34

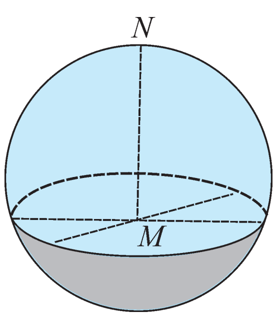
Այժմ դրան համանման պատկերացնենք, որ գնդային մակերևույթն առաջանում է մի կիսաշրջանագծի պտտումից, որին ներգծած է միմյանց հավասար n հատվածներ ունեցող բեկյալ: Նկար 35-ում պատկերված է այդպիսի բեկյալ, որն



Նկ. 35



Նկ. 36



Նկ. 37

ստանալու համար կիսաշրջանագիծը տրոհված է հավասար աղեղների և տրոհման կետերը հաջորդաբար միացված են լարերով։ Տրամագծի շուրջը պտտելիս բեկյալի հատվածները առաջացնում են կոնի, հատած կոնի, երբեմն նաև գլանի կողմնային մակերևույթներ (նկ. 36)։ Այդ համակցված մակերևույթի մակերեսը (նշված կողմնային մակերևույթների մակերեսների գումարը) կարող ենք ընդունել որպես գնդային մակերևույթի մակերեսի մոտավոր արժեք։ Ընդ որում՝ որքան մեծ է բեկյալի հատվածների n թիվը, այնքան ավելի ճշգրիտ է այդ մոտավոր արժեքը։

Պատկերացնենք, որ ներգծյալ բեկյալի հատվածների թիվը շարունակաբար կրկնապատկվում է։ Այդպիսի բեկյալի պտտումից առաջացած համակցված մակերևույթի մակերեսի սահմանն էլ ընդունում ենք որպես գնդային մակերևույթի մակերես։

Կատարելով անհրաժեշտ արտածումներ (հետաքրքրվողները կարող են ծանոթանալ Ա-4 և Ա-5 խնդիրների լուծումներին), ստացվում է, որ R շառավիղով գնդային մակերևույթի մակերեսը կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\mathbf{S=4\pi R^2}։$$

Նկատենք, որ πR^2 մեծությունը ներկայացնում է գնդի մեծ շրջանի մակերեսը։ Ուրեմն՝ *գնդային մակերևույթի մակերեսը հավասար է գնդի մեծ շրջանի մակերեսի քառապատիկին։*

Ծանոթություն

Ուշագրավ է այն փաստը, որ Հին Հունաստանում բացահայտել էին, որ հարթությամբ հատելիս գնդային մակերևույթից անջատված յուրաքանչյուր մասի՝ սեգմենտային մակերևույթի մակերեսը կարելի է հաշվել $S_{\text{կ}}=2\pi Rh$ բանաձևով, որտեղ R-ը գնդի շառավիղն է, h-ը՝ սեգմենտի բարձրությունը (MN հատվածը նկար 37-ում)։ Մասնավորապես, եթե այդ բարձրությունը հավասար լինի գնդի տրամագծին՝ $h=2R$, ապա սեգմենտային մակերևույթի փոխարեն կստացվի գնդային մակերևույթը (առանց մեկ կետի)։ Եվ եթե սեգմենտի մակերեսի բանաձևում տեղադրենք h-ի այդ մեծությունը, կստանանք նույն $S=4\pi R^2$ բանաձևը, որից հաջողությամբ օգտվել են դեռևս մ. թ. ա. 3-րդ դարից ի վեր, և որից այսօր էլ օգտվելու ենք մենք (տե՛ս նաև Ա-5 խնդրի պարզաբանումը)։

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

51. Կարո՞ղ են արդյոք մի ուղղի վրա ընկած երեք կետերը գտնվել նույն գնդային մակերևույթի վրա:
52. M և N կետերը գտնվում են մի գնդային մակերևույթի վրա, որի կենտրոնը O կետն է, և այն ընկած չէ MN հատվածի վրա: Ինչպիսի՞ եռանկյունն է OMN եռանկյունը: Ինչպե՞ս են դասավորված MN և OK ուղիղները, որտեղ K-ն MN հատվածի միջնակետն է:
53. O կետը R=8 սմ շառավիղով գնդային մակերևույթի կենտրոնն է: Այդ մակերևույթի վրա վերցված են A և B կետերն այնպես, որ AB=R: Գտեք O կետի հեռավորությունը AB ուղղից:
54. A և B կետերը վերցված են O կենտրոնով գնդային մակերևույթի վրա այնպես, որ $\angle AOB$=90°, իսկ O կետի հեռավորությունը AB ուղղից 6 սմ է: Գտեք այդ գնդային մակերևույթի շառավիղը:
55. Որոշեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.
    ա) եթե տրված գունդը և հարթությունն ընդհանուր կետ չունեն, ապա գնդի կենտրոնից այդ հարթության հեռավորությունը մեծ է գնդի շառավիղից,
    բ) գնդի կենտրոնից հավասարահեռ հատույթների շառավիղները հավասար են,
    գ) գնդի երկու հատույթներից ավելի մեծ շառավիղ ունի այն հատույթը, որի հարթությունն ավելի մոտ է գնդի կենտրոնին,
    դ) եթե տարածության մեջ տրված F պատկերն այնպիսին է, որ նրա բոլոր կետերը հավասարահեռ են տրված կետից, ապա այդ F պատկերը գնդային մակերևույթ է:
56. Գնդի կենտրոնից 12 սմ հեռավորություն ունեցող հատույթի մակերեսը 25π սմ^2 է: Գտեք այդ գնդի շառավիղը:
57. Գնդային մակերևույթի և նրա կենտրոնից 8 սմ հեռավորություն ունեցող հարթության հատումից առաջացած շրջանագծի երկարությունը 12π սմ է: Գտեք այդ գնդի մեծ շրջանի մակերեսը:
58. 20 սմ տրամագծով գնդային մակերևույթը հատվում է հարթությամբ: Հատույթի կամայական կետը գնդի կենտրոնին միացնող հատվածը և հատող հարթությունը կազմում են 45° անկյուն: Գտեք հատույթի շրջանագծի երկարությունը:
59. 12 սմ կողմով $ABCD$ քառակուսու բոլոր գագաթները գտնվում են գնդային մակերևույթի վրա: Գտեք գնդային մակերևույթի O կենտրոնի հեռավորությունը քառակուսու հարթությունից, եթե հայտնի է, որ OA շառավիղն այդ հարթության հետ կազմում է՝ **ա)** 45° անկյուն, **բ)** 30° անկյուն:
60. Ինչպե՞ս կփոփոխվի գնդային մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա շառավիղը՝ **ա)** մեծացնեն 3 անգամ, **բ)** փոքրացնեն 2 անգամ:

61. Տրված գնդային մակերևույթին քանի՞ շոշափող հարթություն է հնարավոր տանել տրված կետից, եթե այդ կետը գտնվում է՝ **ա)** գնդային մակերևույթի վրա, **բ)** գնդից դուրս:
62. Գնդային մակերևույթի շոշափող հարթության մեջ վերցված է մի M կետ, որի հեռավորությունը շոշափման կետից 5 սմ է, իսկ գնդի կենտրոնից՝ 13 սմ: Գտեք այդ գնդի շառավիղը:
63. Ընդունելով որպես գունդ՝ գտեք Երկիր մոլորակի շառավիղը՝ իմանալով, որ նրա հասարակածը 40000 կմ է:
64. Լուսնի տրամագիծը կազմում է (մոտավորապես) Երկրի տրամագծի քառորդ մասը: Դիտելով որպես գնդեր՝ համեմատեք Լուսնի և Երկրի մակերևույթների մակերեսները:
65. Գտեք այն գնդային մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է 32 սմ տրամագծով կիսաշրջանի պտտումից տրամագծի շուրջը:
66. Ի՞նչ մակերեսով կաշի է անհրաժեշտ 12 սմ շառավիղով գնդակ կարելու համար (կարերի համար ավելացնել գնդակի մակերևույթի մակերեսի 10%-ը):
67. Գտեք 10 սմ շառավիղով կիսագնդի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:
68. Գնդի տրամագիծը 4 դմ է: Պարզեք, թե այդ գնդի մակերևույթի մակերեսը մե՞ծ, թե՞ փոքր է, քան 50 դմ^2-ն:
69. Գնդաձև ձմերուկը նույն տրամագծի երկայնքով կտրատել են այնպես, որ ձմերուկը բաժանվել է չորս հավասար կտորների: Կտորներից յուրաքանչյուրի մակերևույթի մի մասը կեղև է, իսկ մյուս մասը կազմված է երկու միատեսակ կիսաշրջաններից: Վերցրեք այդ կտորներից մեկը և պարզեք, թե կեղևի մակերեսը դրա լրիվ մակերևույթի մակերեսի ո՞ր մասն է կազմում:
70. Գտեք այն շրջանի շառավիղը, որի մակերեսը հավասար է 10 սմ շառավիղով գնդային մակերևույթի մակերեսին:
71. Գնդային մակերևույթի մակերեսը 100π սմ^2 է: Գտեք նրա մեծ շրջանագծի երկարությունը:
72. Գտեք Երկրի 45°-ի զուգահեռականի երկարությունը (Երկիրը դիտեք որպես 6400 կմ շառավիղով գունդ): Գտեք նաև ձեր բնակավայրով անցնող զուգահեռականի երկարությունը:
73. Նկարեք գնդային մակերևույթ և այնպիսի եռանկյուն բուրգ, որի՝ **ա)** բոլոր գագաթները գտնվում են գնդային մակերևույթի վրա, **բ)** հիմքի գագաթները գտնվում են գնդային մակերևույթի վրա, իսկ բուրգի գագաթը համընկնում է գնդի կենտրոնի հետ:
74. Նկարեք գնդային մակերևույթ և այնպիսի եռանկյուն պրիզմա, որի բոլոր գագաթները գտնվում են գնդային մակերևույթի վրա:
75. 4 սմ կող ունեցող խորանարդի բոլոր գագաթները գտնվում են տրված գնդային մակերևույթի վրա: Գտեք այդ գնդային մակերևույթի շառավիղը:

76. Գունդը հատում են երկու զուգահեռ հարթություններ, որոնց միջև հեռավորությունը 17 սմ է: Ստացված հատույթների մակերեսները հավասար են 25π սմ^2 և 144π սմ^2: Գտեք գնդային մակերևույթի մակերեսը:

77*. Հարթությունը շոշափում են R շառավիղով երեք գնդեր, որոնք զույգ առ զույգ շոշափում են իրար: Գտեք այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է այդ գնդերն ու այդ հարթությունը:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Հարթաչափության դասընթացում դուք ուսումնասիրել եք երկու շրջանագծերի փոխադարձ դասավորության դեպքերը: Համանման ձևով այժմ դիտարկեք երկու գնդային մակերևույթների փոխդասավորության դեպքերը: Դասակարգում կատարելիս նկատի ունեցեք, որ երկու գնդային մակերևույթների փոխդասավորությունը կախված է դրանց կենտրոնների հեռավորությունից և շառավիղների երկարություններից:**

2. **Ուսումնասիրեք հետևյալ տեքստը**

Մենք առիթներ ունեցել ենք խոսելու սահմանման մասին, ձևակերպել ենք բազմաթիվ հասկացությունների սահմանումներ: Սահմանել հասկացությունը՝ նշանակում է բացահայտ ներկայացնել նրա բովանդակությունը, այսինքն՝ նշել հասկացությունն արտացոլող առարկայի էական հատկանիշները: Ինչպես առօրեական մտածողության, այնպես էլ գիտության մեջ որոշ հասկացությունների սահմանման դեպքում երբեմն որպես էական հատկանիշ է վերցվում առարկայի կառուցման, ստացման, առաջացման եղանակը: Դրանք *գենետիկ* (ծագումնաբանական) սահմանումներն են, որոնք հաճախ կիրառվում են նաև երկրաչափության մեջ: Օրինակ՝ «Գունդն այն մարմինն է, որն առաջանում է կիսաշրջանի՝ տրամագծի շուրջը պտտումից»: Իհարկե, նույն հասկացության համար կարող են տրվել տարբեր սահմանումներ, ինչպես, օրինակ, գնդի սահմանումները, որոնցից մեկը ներկայացվեց այստեղ, իսկ մյուսը՝ 3.1 կետում: Սակայն ինչ եղանակով էլ որ տրվի սահմանումը, այն ապահովելու է հասկացության բովանդակության ճշգրիտ և ամբողջական բացահայտումը: Դա անհրաժեշտ է, որպեսզի հստակորեն ու միանշանակ արտահայտվեն ու ընկալվեն մեր մտքերը: Այդ պատճառով էլ նույն հասկացության համար տարբեր սահմանումներ տալու դեպքում առաջ է գալիս դրանց համարժեք լինելը ցույց տալու հարց:

Ընդհանուր առմամբ, սահմանումը որոշակի կանոններով կատարվող տրամաբանական գործողություն է, այն պետք է բավարարի մի շարք պահանջների: Մասնավորապես՝ *յուրաքանչյուր սահմանում պետք է լինի ճշգրիտ, որոշակի, հստակ և հակիրճ, չպետք է պարունակի նույնաբանություն և հնարավորինս զերծ պետք է լինի ժխտում արտահայտող հասկացություններից*: Սակայն միշտ չէ, որ հնարավոր (կամ անհրաժեշտ) է լինում, որ ամեն մի հասկացության համար տրվի այդ բոլոր պահանջներին բավարարող սահմանում: Առօրյայում, ինչպես նաև ուսումնական գործընթացում հաճախ են լինում իրադրություններ, երբ ասելիքը պարզ ու մատչելի դարձնելու նպատակով այս կամ այն հասկացությունը ներմուծվում է առանց ճշգրիտ սահմանման: Այդ դեպքում օգտագործվում են հատուկ հնարներ, որոնք հարակից են սահմանմանը և որոշ առումով փոխարինում են նրան:

Սահմանմանը փոխարինող հնարներից մեկը ***մատնանշումն է*** (երբեմն անվանում են նաև *ցուցողական սահմանում*), որի դեպքում առարկայի հետ ծանոթացումն ուղեկցվում է առարկայի ցուցադրումով՝ անմիջականորեն, կամ արդեն ծանոթ մեկ այլ առարկայի հետ զուգահեռ անցկացնելու միջոցով: Մատնանշման դեպքում հասկացության բովանդակությունը բացահայտելու համար հիմք են դառնում անմիջական դիտումներն ու փորձը: Հիշեք, որ տարրական դասարաններում ձեզ համար այդ եղանակով են առաջին անգամ «ներմուծվել» եռանկյան, խորանարդի, գնդի և այլ հասկացությունները:

Սահմանմանը փոխարինող հնար է նաև ***նկարագրությունը*** (երբեմն անվանում են *նկարագրական սահմանում*): Այդ դեպքում առարկայի համար առանձնացվում են որոշ (բայց ոչ անպայման էական) հատկանիշներ, դրանք ներկայացվում են կոնկրետ մանրամասներով, որոնք միասնաբար տալիս են առարկայի ամբողջական պատկերը: Նկարագրության նպատակն է համակողմանի պատկերացում տալ առարկայի մասին, հատկանիշները ներկայացնել «անկողմնակալ» ձևով՝ ինչպես որ դրանք կան և դրսևորվում են դիտումների մեջ: Ի տարբերություն սահմանման՝ նկարագրության դեպքում ձևակերպումների հակիրճության պահանջ չի դրվում, և «ազատ ոճի» շարադրանքով ներկայացվում են այս կամ այն առարկայի հիմնական հատկանիշները: Եթե նկատեցիք, օրինակ, պտտական պատկերների, մասնավորապես՝ գլանի և կոնի հասկացությունների ներմուծման ժամանակ մենք օգտվեցինք այդ հնարից:

Տեքստն ուսումնասիրելուց հետո փորձեք որևէ սկզբունքով այն տրոհել մի քանի հատվածների և դրանց յուրաքանչյուրի համար ընտրել ենթավերնագիր: Իսկ ի՞նչ վերնագիր կառաջարկեք ամբողջ տեքստի համար:

Լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ
Գլուխ I-ի վերաբերյալ

78. Հիմքի r շառավիղով գլանի առանցքային հատույթը քառակուսի է: Գլանի առանցքին զուգահեռ հատույթի մակերեսը երկու անգամ փոքր է առանցքային հատույթի մակերեսից: Գտեք այդ հատույթի հեռավորությունը գլանի առանցքից:

79. Գլանի հիմքի տրամագիծը 12 սմ է, բարձրությունը՝ 20 սմ: Դիտարկվում են գլանի մակերևույթի վրա գտնվող այն կետերը, որոնց հեռավորությունը գլանի ստորին հիմքի կենտրոնից 10 սմ է: Ի՞նչ պատկեր են կազմում այդ կետերը: Գտեք դրանց հեռավորությունը ստորին հիմքի հարթությունից:

80. R շառավիղով երեք միատեսակ գլաններ կիպ դասավորված են այնպես, որ զույգ առ զույգ շոշափում են (յուրաքանչյուրի հիմքերի շրջանագծերը շոշափում են մյուսների հիմքերի շրջանագծերը): Ի՞նչ շառավիղով գլան է հնարավոր տեղավորել դրանց արանքում:

81. Կոնի բարձրությունը 20 սմ է, հիմքի շառավիղը՝ 25 սմ: Գտեք կոնի գագաթով տարված հատույթի մակերեսը, եթե այդ հատույթի հեռավորությունը հիմքի կենտրոնից 12 սմ է:

82. Կոնի ծնորդը կրկնակի մեծ է բարձրությունից: Որոշեք կոնի առանցքային հատույթի անկյունները:

83. Կոնի կողմնային մակերևույթի փռվածքը $60°$ աղեղով սեկտոր է: Գտեք կոնի առանցքային հատույթի՝ գագաթին հարակից անկյունը:

84. Կոնի բարձրության միջնակետով տարված է որևէ ծնորդին զուգահեռ ուղիղ: Գտեք այդ ուղղի այն հատվածը, որը գտնվում է կոնի մեջ, եթե հայտնի է, որ կոնի ծնորդը m է:

85. Հավասարասրուն սեղանի հիմքերը 6 սմ և 10 սմ են, իսկ սուր անկյունը՝ $60°$: Հաշվեք այն մարմնի մակերևույթների մակերեսը, որն առաջանում է, երբ այդ սեղանը պտտվում է՝ **ա)** մեծ հիմքի շուրջը, **բ)** փոքր հիմքի շուրջը:

86. Հատած կոնի հիմքերի մակերեսները հավասար են S_1 և S_2, իսկ ծնորդը հիմքի հարթության հետ կազմում է $60°$ անկյուն: Գտեք հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

87. Գնդային մակերևույթի նույն կետից տարված են տրամագիծ և այդ տրամագծի հետ $60°$ անկյուն կազմող հատույթ: Գտեք գնդային մակերևույթի շառավիղը, եթե այդ հատույթի շառավիղը 5 սմ է:

88. 13 սմ շառավիղով գնդային մակերևույթի վրա նշված են երեք կետեր այնպես, որ դրանց միացնող հատվածներն ունեն 6 սմ, 8 սմ և 10 սմ երկարություն: Գտեք գնդային մակերևույթի կենտրոնի հեռավորությունն այդ կետերով անցնող հարթությունից:

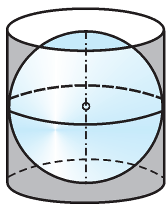
89. Երկու հավասար գնդեր միմյանց հետ հատվում են, և հատույթում ստացվում է 12 սմ շառավիղով շրջան: Գտեք յուրաքանչյուր գնդի շառավիղը, եթե գնդերի կենտրոնների հեռավորությունը 16 սմ է:

90. R շառավիղով երկու միատեսակ գնդեր դասավորված են այնպես, որ դրանցից մեկի կենտրոնը գտնվում է մյուսի մակերևույթի վրա: Գտեք դրանց մակերևույթների հատման գծի երկարությունը:

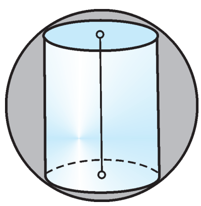
91. Գլանի հիմքի շառավիղը r է, բարձրությունը՝ h: Գտեք գլանի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն ճանապարհի երկարությունը, որ միացնում է տարբեր հիմքերի՝ տրամագծորեն հակադիր կետերը:

92*. Գլանի հիմքի շրջանագծի երկարությունը 6 մ է: Մասնիկը, որը սկզբում գտնվում էր կողմնային մակերևույթի M կետում, շարժվում է մակերևույթի վրա՝ մնալով միշտ հիմքից նույն հեռավորության վրա: M_1 կետում նրա հետագծի MM_1 աղեղի երկարությունը x է: M և M_1 կետերի հեռավորությունն արտահայտեք որպես x-ից կախված ֆունկցիա:

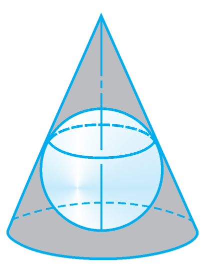
Խնդիրներ համակցված մարմինների վերաբերյալ



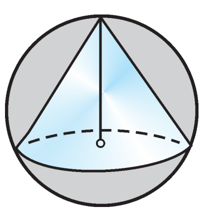
Նկ. 38



Նկ. 39



Նկ. 40



Նկ. 41

Երբեմն հարկավոր է լինում դիտարկել այնպիսի մարմիններ, որոնք ներկայացնում են պտտական մարմինների և բազմանիստերի համակցություն: Դրանց վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս կարևոր են հետևյալ հասկացությունները:

- *Պրիզման* կոչվում է *գլանին ներգծած*, եթե պրիզմայի հիմքերը ներգծած են գլանի հիմքերին: Այդ դեպքում գլանը կոչվում է *պրիզմային արտագծած*:
- *Պրիզման* կոչվում է *գլանին արտագծած*, եթե պրիզմայի հիմքերն արտագծած են գլանի հիմքերին: Այդ դեպքում գլանը կոչվում է *պրիզմային ներգծած*:
- *Բուրգը* կոչվում է *կոնին ներգծած*, եթե նրանց գագաթները համընկնում են, և բուրգի հիմքը ներգծած է կոնի հիմքին: Այդ դեպքում կոնը կոչվում է *բուրգին արտագծած*:
- *Բուրգը* կոչվում է *կոնին արտագծած*, եթե նրանց գագաթները համընկնում են, և բուրգի հիմքն արտագծած է կոնի հիմքին: Այդ դեպքում կոնը կոչվում է *բուրգին ներգծած*:
- *Բազմանիստը* կոչվում է *գնդային մակերևույթին (գնդին) արտագծած*, եթե նրա յուրաքանչյուր նիստը շոշափում է գնդային մակերևույթը: Այդ դեպքում գնդային մակերևույթը (գունդը) կոչվում է *բազմանիստին ներգծած*:
- *Բազմանիստը* կոչվում է *գնդային մակերևույթին ներգծած*, եթե նրա բոլոր գագաթներն ընկած են գնդային մակերևույթի վրա: Այդ դեպքում գնդային մակերևույթը կոչվում է *բազմանիստին արտագծած*:
- *Գլանը* կոչվում է *գնդին արտագծած*, եթե գլանի հիմքերը և ծնորդները շոշափում են գունդը (նկ. 38): Այդ դեպքում գունդը կոչվում է *գլանին ներգծած*:
- *Գլանը* կոչվում է *գնդին ներգծած*, եթե գլանի հիմքերը գնդի հատույթներ են (նկ. 39): Այդ դեպքում գունդը կոչվում է *գլանին արտագծած*:
- *Կոնը* կոչվում է *գնդին արտագծած*, եթե նրա հիմքը և ծնորդները շոշափում են գունդը (նկ. 40): Այդ դեպքում գունդը կոչվում է *կոնին ներգծած*:
- *Կոնը* կոչվում է *գնդին ներգծած*, եթե նրա գագաթը գտնվում է գնդի մակերևույթի վրա, իսկ հիմքը գնդի հատույթ է (նկ. 41): Այդ դեպքում գունդը կոչվում է *կոնին արտագծած*:

93. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմային ներգծած է գլան: Գտեք գլանի մակերևույթի մակերեսը, եթե պրիզմայի բարձրությունը 3 սմ է, իսկ հիմքի կողմը՝ $2\sqrt{3}$ սմ:

94. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմային արտագծած է գլան: Գտեք գլանի մակերևույթի մակերեսը, եթե պրիզմայի բարձրությունը 4 սմ է, իսկ հիմքի բարձրությունը՝ 6 սմ:

95. 12 սմ բարձրություն ունեցող կոնին ներգծած է բուրգ, որի հիմքը 6 սմ և 8 սմ կողմերով ուղղանկյուն է: Գտեք այդ կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

96. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը a է, իսկ կողմնային նիստերը հիմքի հարթությանը թեքված են 45° անկյան տակ: Գտեք այդ բուրգին ներգծած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

97. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 3 սմ է, իսկ կողմնային կողերը հիմքի հարթությանը թեքված են 60° անկյան տակ: Գտեք այդ բուրգին արտագծած գնդային մակերևույթի շառավիղը:

98. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմային ներգծած է գնդային մակերևույթ: Գտեք պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսի հարաբերությունը գնդային մակերևույթի մակերեսին:

99. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 2 սմ է, իսկ կողմնային կողը՝ $2\sqrt{2}$ սմ: Գտեք այդ պրիզմային արտագծած գնդային մակերևույթի մակերեսը:

100. Գնդին արտագծած է ուղիղ զուգահեռանիստ, որի հիմքը 60°-ի սուր անկյունով շեղանկյուն է: Գտեք այդ զուգահեռանիստի մեծ անկյունագծի՝ հիմքի հարթության հետ կազմած անկյունը:

101. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքի կողմը a է: Բուրգին ներգծած գնդային մակերևույթը հատում է բուրգի բարձրությունը նրա միջնակետում: Գտեք այդ բուրգի կողմնային կողը:

102. R շառավիղով գնդին արտագծած է գլան: Գտեք այդ գլանին արտագծած գնդի մակերևույթի մակերեսը:

103. Գնդին ներգծած է կոն, որի հիմքն այդ գնդի մեծ շրջանն է: Գտեք այդ գնդի և կոնի մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

104. R շառավիղով գնդին արտագծած է հատած կոն, որի ծնորդը մեծ հիմքի հարթության հետ կազմում է φ անկյուն: Գտեք հատած կոնի ծնորդը և հիմքերի շառավիղները:

105*. R շառավիղով գնդին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն բուրգ, որի գագաթի հարթ անկյունը հավասար է α: Գտեք այդ բուրգի բարձրությունը:

106. Գնդին արտագծած է հատած կոն, որի հիմքերի շառավիղներն են r_1 և r_2: Գտեք գնդի շառավիղը:

107. Գտեք այն գնդի շառավիղը, որը շոշափում է միավոր խորանարդի երեք նիստերը և այդ խորանարդին ներգծած գունդը:

ԳԼՈՒԽ II

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 4 ՎԵԿՏՈՐԻ ՀԱՄԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

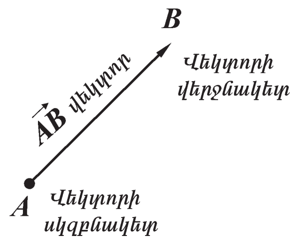
4.1. Ի՞նչ է վեկտորը

Վեկտորը (vector) լատիներեն բառ է, որը բառացի թարգմանությամբ նշանակում է *տանող, կրող*: Այն մեզ արդեն ծանոթ է միջին դպրոցի ինչպես երկրաչափության, այնպես էլ ֆիզիկայի դասընթացներից: Վեկտորը ժամանակակից գիտության կարևորագույն հասկացություններից է և ունի բազմաթիվ կիրառություններ տարբեր երևույթների մոդելավորման և հետազոտման մեջ: Միջին դպրոցում մենք դիտարկել ենք վեկտորները հարթության վրա և ծանոթացել դրանց հետ կատարվող որոշ գործողությունների: Իսկ այժմ կընդլայնենք մեր դիտարկումների շրջանակը՝ գործ ունենալով նաև տարածության մեջ տրված վեկտորների հետ: Տարածության մեջ վեկտորներին վերաբերող հասկացությունները ներմուծվում են գրեթե նույն կերպ, ինչպես արվել է հարթաչափության մեջ:

Վեկտոր հասկացության բովանդակությունը ներկայացնելիս հարմար է լուսաբանող օրինակներ վերցնել ֆիզիկայից: Ֆիզիկական երևույթներն ուսումնասիրելիս գործ ենք ունենում երկու տեսակի մեծությունների հետ: Մեծությունների մի տեսակը բնորոշվում է նրանով, որ չափման միավորի առկայության դեպքում տվյալ մեծությունն արտահայտվում է որևէ թվով: Այդ դեպքում թվային արժեքը լիովին բավարար է տվյալ մեծությունը որոշելու համար: Օրինակ՝ նյութի զանգվածը, ջերմաստիճանը, խտությունը, շարժվող մարմնի անցած ճանապարհը, ժամանակն այդպիսի մեծություններ են. դրանց անվանում են *սկալյար մեծություններ*: Մեծությունների մյուս տեսակը բնորոշվում է ոչ միայն թվային արժեքով, այլև տարածության մեջ ունեցած ուղղությամբ: Այդպիսին են նյութական կետի (մարմնի) վրա ազդող ուժը, տեղափոխությունը, շարժման արագությունը, արագացումը, էլեկտրական դաշտի լարվածությունը և այլն. դրանց անվանում են *վեկտորական մեծություններ*: Այդպիսի մեծությունները որոշելու համար միայն դրանց թվային արժեքներն իմանալը բավարար չէ: Օրինակ, եթե ասենք, որ կետը տեղափոխվել է մեկ մետրով և չնշենք նրա տեղափոխման ուղղությունը, ապա այդ կետի վերջնական դիրքը կմնա անորոշ:

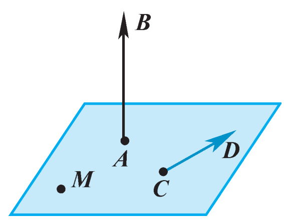
Այսպիսով, *վեկտորական մեծությունը* (կամ պարզապես *վեկտորը*) *այն մեծություն է, որը որոշվում է թվային արժեքով և ուղղությամբ*: Վեկտորի թվային արժեքը կոչվում է նրա *մոդուլ*:

Վեկտորը երկրաչափորեն պատկերվում է հատվածով, որի համար նշվում է նաև ուղղություն, այսինքն՝ այն ներկայացվում է որպես *ուղղորդված հատված**: Հատվածի երկարությունը վերցվում է վեկտորի մոդուլին հավասար: Հատվածի ծայրակետերից մեկն ընդունվում է որպես վեկտորի *սկզբնակետ*, իսկ մյուսը՝ որպես *վերջնակետ*: Վեկտորի ուղղությունը՝ սկզբնակետից դեպի վերջնակետը, նկարի վրա ցույց է տրվում սլաքով (նկ. 42): Վեկտորները սովորաբար նշանակում են լատինական երկու մեծատառով, որոնց վերևում դրվում է գծիկով սլաք, օրինակ՝ $\overrightarrow{AB}$: Առաջին տառը նշանակում է վեկտորի սկզբնակետը, իսկ երկրորդը՝ վերջնակետը: Ուստի՝ վեկտորի գրառման համար ծայրակետերի տառերի հերթականությունը հատուկ կարևորություն ունի (հիշենք, որ հատվածի գրառման դեպքում տառերի հերթականությունն էական չէ):



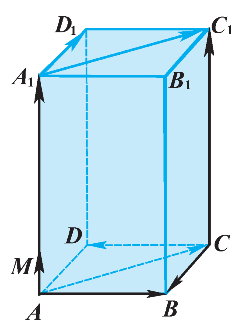
Նկ. 42

Դիտարկվում է նաև այնպիսի վեկտոր, որի մոդուլը զրո է. այն կոչվում է *զրոյական վեկտոր*: Զրոյական վեկտորը պատկերվում է կետով. կարելի է ասել, որ նրա սկզբնակետը և վերջնակետը համընկնում են: Հասկանալի է, որ այն որոշակի ուղղություն չունի (այլ կերպ ասած՝ զրոյական վեկտորին կարելի է վերագրել ցանկացած ուղղություն): Նկար 43-ում պատկերված են $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ ոչ զրոյական վեկտորները և $\overrightarrow{MM}$ զրոյական վեկտորը: Վեկտորները հաճախ նշանակում են նաև լատինական փոքրատառերով, այդ դեպքում գրվում է մեկ փոքրատառ և նրա վերևում դրվում գծիկով սլաք, օրինակ՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և այլն:



Նկ. 43

Ինչպես ասվեց, ուղղորդված հատվածով ներկայացված ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի մոդուլը հավասար է AB հատվածի երկարությանը. այն նշանակվում է $|\overrightarrow{AB}|$: Նմանապես $\vec{a}$ վեկտորի մոդուլը նշանակվում է $|\vec{a}|$: Նկար 44-ում պատկերված է $AB = 4$ սմ, $AD = 3$ սմ, $AA_1 = 6$ սմ չափ-



Նկ. 44

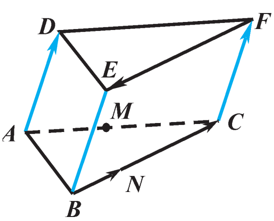
* Ինչպես որ առարկան և իր պատկերը, այնպես էլ վեկտորն ու իրեն պատկերող ուղղորդված հատվածը նույնական չեն: Սակայն հակիրճ արտահայտվելու համար սովորաբար առարկայի պատկերին ևս տրվում է տվյալ առարկայի անվանումը, եթե, իհարկե, տվյալ տեքստում դրանից մտքի որոշակիությունը չի խախտվում: Այդ առումով կընդունենք, որ «$\overrightarrow{AB}$ վեկտոր» և «Վեկտոր ներկայացնող $\overrightarrow{AB}$ ուղղորդված հատված» արտահայտություններն ունեն նույն իմաստը:

սերով ուղղանկյունանիստ, որի AA_1 կողի վրա վերցված է այնպիսի M կետ, որ AM = 1 սմ: Նկարում պատկերված վեկտորների մոդուլների համար կարող ենք գրել. $|\overrightarrow{AB}|= 4$ սմ, $|\overrightarrow{CD}|= 4$ սմ, $|\overrightarrow{AM}|= 1$ սմ, $|\overrightarrow{MM}|= 0$, $|\overrightarrow{MA_1}|= 5$ սմ, $|\overrightarrow{CB}|= 3$ սմ, $|\overrightarrow{AA_1}|= 6$ սմ, $|\overrightarrow{AC}|= \sqrt{9\text{սմ}^2+16\text{սմ}^2}=5$ սմ և այլն:

4.2. Վեկտորների հավասարությունը

Ինչպես ասվեց, վեկտորը բնորոշվում է թվային արժեքով (մոդուլով) և ուղղությամբ: Ուրեմն, վեկտորների հավասարությունը սահմանելու համար պետք է նկատի ունենալ ինչպես դրանց թվային արժեքները, այնպես էլ ուղղությունները: Նախքան սահմանում տալը՝ պարզաբանենք վեկտորների ուղղություններին վերաբերող մի հարց. ո՞ր դեպքում կասենք, որ երկու վեկտորները ունեն միևնույն ուղղությունը:

Երկու ոչ զրոյական վեկտորներ, որոնց ներկայացնող ուղղորդված հատվածները գտնվում են միևնույն ուղղի կամ զուգահեռ ուղիղների վրա, կոչվում են *համագիծ վեկտորներ*: Եթե ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները համագիծ են (նշանակվում է $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$), ապա նրանք կարող են ուղղված լինել կա՛մ միանման, կա՛մ հակադիր ուղղություններով: Ընդ որում՝ դա կախված է այն բանից, թե արդյոք համուղղվա՞ծ են AB և CD ճառագայթները, թե՞ ոչ*: Առաջին դեպքում (երբ ուղղված են միանման) համագիծ վեկտորները կոչվում են *համուղղված*, իսկ երկրորդ դեպքում՝ *հակուղղված* վեկտորներ: Նկար 45-ում պատկերված $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{CF}$ (նմանապես $\overrightarrow{BN}$ և $\overrightarrow{BC}$) վեկտորները համուղղված են, $\overrightarrow{BC}$ և $\overrightarrow{FE}$ (նմանապես $\overrightarrow{NC}$ և $\overrightarrow{FE}$) վեկտորները՝ հակուղղված: Նկատենք, որ, օրինակ, $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները ո՛չ համուղղված են, ոչ էլ հակուղղված, քանի որ դրանք համագիծ չեն: Այդպիսի վեկտորները կոչվում են *ոչ համագիծ* վեկտորներ: Վեկտորների համուղղված և հակուղղված լինելը գրառելու համար օգտագործվում են մեզ ծանոթ $\uparrow\uparrow$ և $\uparrow\downarrow$ նշանները, օրինակ՝ $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FE}\uparrow\downarrow\overrightarrow{NC}$ և այլն: Ընդունում ենք, որ *զրոյական վեկտորը ցանկացած վեկտորին համագիծ է, ընդ որում՝ համուղղված է*, օրինակ՝ $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{NN}$:



Նկ. 45

Այժմ կարող ենք սահմանել «հավասար վեկտորներ» հասկացությունը:

Սահմանում. ***Երկու վեկտորներ կոչվում են հավասար, եթե նրանք համուղղված են, և նրանց մոդուլները հավասար են:***

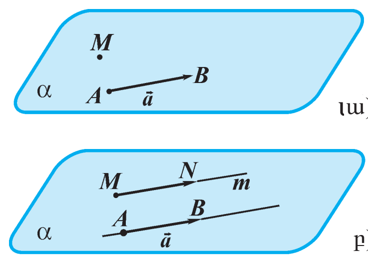
* Հիշենք, որ երկու ճառագայթներ կոչվում են համուղղված, եթե՝ ա) նրանք զուգահեռ են և գտնվում են սկզբնակետերով անցնող ուղղի նույն կողմի վրա (նույն կիսահարթության մեջ), կամ՝ բ) ճառագայթներից մեկն ընդգրկում է մյուսը:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հավասարությունը գրառվում է այսպես՝ $\vec{a}=\vec{b}$, սա նշանակում է, որ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝ $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ և $|\vec{a}|=|\vec{b}|$:

Նկատենք, որ վեկտորների հավասարության սահմանումից հետևում է, որ զրոյական վեկտորները միմյանց հավասար են (դրանք համուղղված են, և մոդուլները հավասար են): Ուրեմն, այլ կերպ կարող ենք ասել, որ *զրոյական վեկտորը միակն է.* այն նշանակվում է $\vec{0}$ նշանով: Ակնհայտ է, որ $|\vec{0}|=0$:

Պարզաբանում

Օգտվելով «հավասար վեկտորներ» հասկացությունից՝ կարող ենք պարզաբանել, թե ինչ է նշանակում *վեկտորի տեղադրումը տրված կետից*:



Նկ. 46

Տրված կետից տրված վեկտորը տեղադրել՝ նշանակում է կառուցել (տանել) այդ վեկտորին հավասար այնպիսի վեկտոր, որի սկզբնակետը տրված այդ կետն է: Ցույց տանք, որ *տարածության կամայական M կետից կարելի է տեղադրել տրված վեկտորին հավասար վեկտոր և այն էլ միայն մեկը*:

Իսկապես, եթե $\vec{a}$-ն զրոյական վեկտոր է, ապա հենց $\overrightarrow{MM}$-ը կլինի որոնելի վեկտորը: Իսկ եթե $\vec{a}$-ն ոչ զրոյական վեկտոր է, ապա նախ կտանենք $\vec{a}$ վեկտորի ծայրակետերով (*A* և *B* կետերով, նկ. 46, ա-ում) և *M* կետով անցնող α հարթությունը, և խնդիրը կհանգի հարթաչափական խնդրի, որի լուծումը մեզ հայտնի է: Հիշենք, որ այդ խնդիրը լուծվում է այսպես. տանում ենք *M* կետով անցնող այն *m* ուղիղը, որը զուգահեռ է *AB*-ին (եթե *M*-ն ընկած է *AB* ուղղի վրա, ապա որպես *m* ուղիղ է ծառայում հենց *AB*-ն): Այնուհետև m ուղղի վրա տեղադրվում է *AB*-ին հավասար *MN* հատվածն այնպես, որ *MN* և *AB* ճառագայթները լինեն համուղղված (նկ. 46, բ): Ստացված $\overrightarrow{MN}$ վեկտորը որոնելին է, իսկ կառուցումից հետևում է, որ այն միակն է:

Ծանոթություն

«$\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է *A* կետից» արտահայտության փոխարեն երբեմն ասվում է նաև՝ *$\vec{a}$ վեկտորը կիրառված է A կետից*: Այդ դեպքում *A* կետը կոչվում է վեկտորի *կիրառման կետ*: Ինչպես տեսանք, տրված վեկտորը կարելի է տեղադրել (այսինքն՝ կիրառել) տարածության տարբեր կետերից և ստանալ միմյանց հավասար անվերջ թվով վեկտորներ: Պատկերավոր կարելի է ասել, որ այդ վեկտորները հենց նույն վեկտորներն են՝ թեև նրանց համար տարբեր են կիրառման կետերը: Այսինքն՝ կիրառման կետերը փոփոխելուց վեկտորների հավասարությունը չի խախտվում. կիրառման կետի առումով վեկտորն ազատ է: Նշենք, որ ֆիզիկական երևույթներ հետազոտելիս դիտարկվում են երեք տեսակի վեկտորներ՝ *ազատ, սահող* և *կապված*: Ընդ որում՝ ազատ վեկտորը կարող է կիրառվել տարածության ցանկացած կետից, սահող վեկտորը՝ միայն մեկ ուղղի պատկանող կետերից, իսկ կապված վեկտորը՝ միայն մեկ կետից:

Երկրաչափության մեջ մենք կդիտարկենք միայն ազատ վեկտորները, այսինքն այնպիսի վեկտորներ, որոնց համար կիրառման կետը կարող է լինել կամայական:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

108. Թվարկեք մի քանի սկալյար և մի քանի վեկտորական մեծություններ:
109. Հետևյալ ֆիզիկական մեծություններից որո՞նք են վեկտորական. *ճանապարհ, ժամանակ, տեղափոխություն, արագացում, աշխատանք, հզորություն, շարժման քանակ (իմպուլս), զանգված, կշիռ, հոսանքի ուժ, պտտաձման պարբերություն, էլեկտրաշարժ ուժ:*
110. Նշեք մի ուղղի վրա ընկած երեք կետեր՝ A, B, C: Տարեք և գրառեք այն երկու վեկտորները, որոնց՝ **ա)** սկզբնակետը B կետն է, մեկի վերջնակետը A կետն է, մյուսինը՝ C կետը, **բ)** վերջնակետը B կետն է, մեկի սկզբնակետը A կետն է, մյուսինը՝ C կետը:
111. Քանի՞ վեկտոր է հնարավոր պատկերել, եթե որպես ծայրակետեր վերցվեն՝ **ա)** տրված եռանկյան, **բ)** տրված քառանիստի տարբեր գագաթները:
112. Արդյոք ճշմարի՞տ է պնդումը.
    ա) եթե $\vec{AA_1}$-ը զրոյական վեկտոր է, ապա A և A_1 կետերը համընկնում են,
    բ) վեկտորի մոդուլը սկալյար մեծություն է,
    գ) վեկտորի մոդուլը կարող է արտահայտվել ցանկացած իրական թվով,
    դ) վեկտորի մոդուլն արտահայտվում է ոչ բացասական թվով:
113. $MABC$ քառանիստում $CA=MB=4$ սմ, $AB=6$ սմ: D, E և F կետերը համապատասխանաբար AB, BC և AC կողերի միջնակետերն են: Գտեք $\vec{BM}$, $\vec{BD}$, $\vec{DE}$ և $\vec{EF}$ վեկտորների մոդուլները:
114. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը 2 սմ կող ունեցող խորանարդ է: Գտեք $\vec{AA_1}$, $\vec{AC}$, $\vec{DC_1}$ և $\vec{AC_1}$ վեկտորների մոդուլները:
115. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի AB, AD և AA_1 կողերը համապատասխանաբար հավասար են 6 սմ, 5 սմ և 4 սմ: M կետը A_1B_1 կողի միջնակետն է: Գտեք հետևյալ վեկտորի մոդուլը՝ **ա)** $\vec{BM}$, **բ)** $\vec{CM}$:
116. P կետը 12 սմ բարձրություն և 5 սմ շառավիղ ունեցող կոնի գագաթն է, AB-ն՝ հիմքի տրամագիծը: Գտեք $\vec{AB}$ և $\vec{AP}$ վեկտորների մոդուլները:

117. Կարո՞ղ են արդյոք խաչվող ուղիղների վրա ընկած երկու ոչ զրոյական վեկտորները լինել համագիծ:

118. AB և CD հատվածներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է a ուղղին: Համագի՞ծ են արդյոք $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները (պատասխանը հիմնավորել):

119. M կետը AB հատվածի միջնակետն է: Որոշեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) $\vec{AB}=\vec{BA}$, **բ)** $\vec{AB}\uparrow\uparrow\vec{MB}$, **գ)** $\vec{AM}\,||\,\vec{MB}$,

դ) $\vec{AM}\neq\vec{MB}$, **ե)** $\vec{AB}\uparrow\downarrow\vec{BA}$, **զ)** $\vec{AA}=\vec{BB}$:

120. Կարո՞ղ ենք պնդել, որ՝

ա) հակուղղված վեկտորները համագիծ են,

բ) ցանկացած երկու համուղղված վեկտորներ համագիծ են,

գ) երկու հակուղղված վեկտորները ոչ զրոյական վեկտորներ են,

դ) միևնույն վեկտորին հակուղղված երկու վեկտորները համուղղված են,

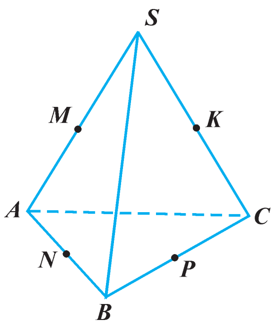
ե) ոչ զրոյական վեկտորին համուղղված վեկտորները համուղղված են,

զ) ցանկացած երկու հավասար վեկտորներ համագիծ են:

121. Նկար 47-ում պատկերված է $SABC$ քառանիստ, որի AS, AB, BC և CS կողերի միջնակետերը համապատասխանաբար M, N, P և K կետերն են: Հետևյալ գրառումներից ընտրեք ճշմարիտ պնդումները.

ա) $\vec{KP}\uparrow\uparrow\vec{SB}$, **բ)** $\vec{MN}\uparrow\downarrow\vec{CS}$, **գ)** $\vec{NP}=\vec{KM}$,

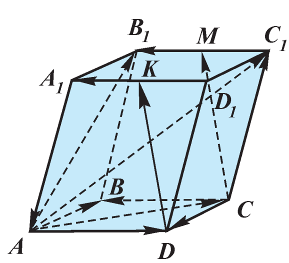
դ) $\vec{MN}=\vec{KP}$, **ե)** $\vec{AC}\uparrow\downarrow\vec{KM}$, **զ)** $\vec{MM}\uparrow\uparrow\vec{BC}$:



Նկ. 47

122. A և B կետերը համաչափ են O կետի նկատմամբ, և $\vec{AM}=\vec{NB}$: M և N կետերն արդյոք համաչա՞փ են O կետի նկատմամբ:

123. Նկար 48-ում պատկերված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստը, M և K կետերը B_1C_1 և A_1D_1 կողերի միջնակետերն են: Նշեք այն վեկտորը, որը ստացվում է տեղադրելով՝ **ա)** C կետից $\vec{DD_1}$-ին հավասար վեկտոր, **բ)** D կետից $\vec{CM}$-ին հավասար վեկտոր, **գ)** A_1 կետից $\vec{AC}$-ին հավասար վեկտոր, **դ)** C_1 կետից $\vec{CB}$-ին հավասար վեկտոր, **ե)** K կետից $\vec{MB_1}$-ին հավասար վեկտոր:



Նկ. 48

124. Տրված $\vec{a}$ և $\vec{AB}$ վեկտորները տարագիծ են: A և B կետերից տեղադրված են $\vec{AD}=\vec{a}$ և $\vec{BC}=\vec{a}$ վեկտորները: Միմյանց նկատմամբ ինչպե՞ս են դասավորված՝ **ա)** AD և BC ուղիղները, **բ)** AB և BC ուղիղները, **գ)** BC ուղիղը և այն հարթությունը, որն անցնում է A, B և D կետերով, **դ)** այն երկու հարթությունները, որոնցից մեկն անցնում է A և C, իսկ մյուսը՝ B և D կետերով:

125. $ABCA_1B_1C_1$ կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողը 6 սմ է, կողմնային կողը՝ 4 սմ: AB կողի M միջնակետերից տեղադրված է $\vec{BB_1}$-ին հավասար վեկտոր, որի վերջնակետը M_1 կետն է: Գտեք $\vec{AM_1}$ վեկտորի մոդուլը:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

Ընթերցեք հետևյալ տեքստը

Վեկտորի հասկացությունը գիտության մեջ առաջին անգամ ներմուծվել է 19-րդ դարում գերմանացի մաթեմատիկոս Հ. Գրասմանի (1809-1877 թթ.) և իռլանդացի մաթեմատիկոս Ու. Համիլտոնի (1805-1865 թթ.) կողմից: Ուշագրավ է այն փաստը, որ և՛ մեկը, և՛ մյուսը հայտնի են եղել ոչ միայն որպես զուտ մաթեմատիկոսներ. Հ. Գրասմանը լուրջ ներդրում է ունեցել նաև ֆիզիկայում ու բանասիրության մեջ, իսկ Ու. Համիլտոնը եղել է նաև ճանաչված աստղագետ: Վեկտորների վերաբերյալ նրանց գաղափարները շատ արագ ընկալվել ու ընդունելի են դարձել մաթեմատիկոսների ու ֆիզիկոսների կողմից, և այդպիսով՝ բնագիտական հետազոտություններում վեկտորների կիրառության միջոցով ավելի սերտ կապեր են հաստատվել մաթեմատիկայի ու ֆիզիկայի միջև: Հետագայում ավելի են ընդլայնվել վեկտորների կիրառության բնագավառները: Բնական երևույթներն ուսումնասիրող ժամանակակից գիտությունների, հատկապես ֆիզիկայի (մասնավորապես՝ մեխանիկայի, էլեկտրադինամիկայի, օպտիկայի, հարաբերականության տեսության, քվանտային ֆիզիկայի և այլ տեսությունների) բազմաթիվ օրենքներ ձևակերպվում են վեկտորների կիրառության միջոցով: Ավելին, վեկտորները կիրառվում են նաև հասարակական կյանքին վերաբերող մի շարք բնագավառներում, ուր ներթափանցել են հետազոտության մաթեմատիկական մեթոդները: Այդպիսի տիպական օրինակ է մաթեմատիկական տնտեսագիտությունը, որում մաթեմատիկական մոդելավորման միջոցով դիտարկվում են արտադրությանը, բաշխմանը, փոխանակմանը և դրանց հարակից այլ գործընթացներին վերաբերող հիմնահարցեր: Այս ամենը հիմք են տալիս ասելու, որ վեկտորների կիրառության շնորհիվ խորքային միջառարկայական կապեր են հաստատվում մաթեմատիկայի և մյուս գիտությունների միջև:

ա) **Տեքստից առանձնացրեք 5-7 բանալի-բառեր, այսինքն՝ այնպիսի բառեր, որոնք, ըստ ձեզ, ամենակարևորն են տվյալ տեքստի բովանդակությունն արտահայտելու համար:**

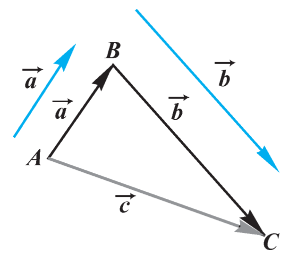
բ) **Փորձեք տեքստի հիման վրա հանգել ձեր կարծիքով կարևոր որևէ եզրակացության և այն ձևակերպել մեկ նախադասությամբ:**

§ 5 ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՀԵՏ

5.1. Վեկտորների գումարումը

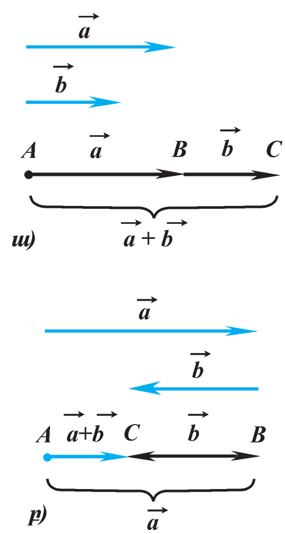
ա) Երկու վեկտորների գումարը

Տարածության մեջ տրված երկու վեկտորների գումարը կարելի է գտնել այնպես, ինչպես արվել է հարթության վրա տրված վեկտորների դեպքում: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: Դիցուք՝ A կետում գտնվող մասնիկը հաջորդաբար կատարում է երկու տեղափոխություն, որոնք որոշվում են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով: Պետք է գտնել մասնիկի դիրքն այդ տեղափոխություններից հետո, այսինքն՝ պետք է որոշել այդ երկու տեղափոխությունների արդյունքը (նկ. 49 և 50):



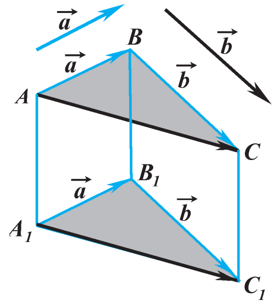
Նկ. 49

Դրա համար նախ A կետից տեղադրում ենք $\vec{a}$ վեկտորը, այսինքն՝ գտնում ենք այն B կետը, որ $\vec{AB}=\vec{a}$: Այնուհետև B կետից տեղադրում ենք $\vec{b}$ վեկտորը, այսինքն՝ գտնում ենք այն C կետը, որ $\vec{BC}=\vec{b}$: Առաջին տեղափոխության արդյունքում մասնիկը կհայտնվի B կետում, իսկ երկրորդ տեղափոխության արդյունքում՝ C կետում: Այսպիսով, երկու տեղափոխությունների արդյունքում մասնիկն ի վերջո կհայտնվի C կետում: Ուրեմն, $\vec{a}$ և $\vec{b}$ հաջորդական տեղափոխությունների արդյունքը կարելի է ստանալ մեկ՝ $\vec{AC}=\vec{c}$, տեղափոխության միջոցով: Ստացված այդ $\vec{c}$ վեկտորն էլ անվանվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար և նշանակվում այսպես. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$: Նույն ձևով է որոշվում նաև կամայական երկու վեկտորների գումարը:



Նկ. 50

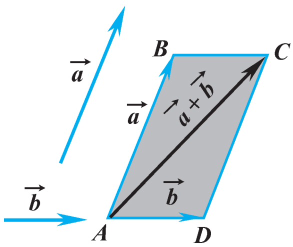
Սահմանում. ***Կամայական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար կոչվում է այն $\vec{c}$ վեկտորը, որի սկզբնակետը որևէ կետից տեղադրված $\vec{a}$ վեկտորի սկզբնակետն է, իսկ վերջնակետը՝ $\vec{a}$-ի վերջնակետից տեղադրված $\vec{b}$ վեկտորի վերջնակետը:***



Նկ. 51

Նշենք, որ $\vec{a}+\vec{b}$ գումարը կախում չունի այն կետի ընտրությունից, որից տեղադրվում է $\vec{a}$ վեկտորը: Այսինքն, եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գումարելիս $\vec{a}$ վեկտորը տեղադրվի մի դեպքում որևէ A կետից, մյուս դեպքում՝ մեկ այլ A_1 կետից, ապա որպես գումարներ կստացվեն այնպիսի $\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{A_1C_1}$ վեկտորներ, որ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$: Դրանում կարելի է համոզվել՝ օգտվելով նկար 50-ից (տե՛ս նաև Ա-6 խնդիրը):

Վեկտորների գումարման սահմանումից հետևում է, այսպես կոչվող, *երեք կետերի կանոնը**, ըստ որի՝ ***պարածության կամայական A, B և C կետերի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$:



Նկ. 52

Երկու տարագիծ վեկտորների գումարը կարելի է գտնել նաև այլ եղանակով, որը կրում է *զուգահեռագծի կանոն* անվանումը: Ըստ այդ կանոնի՝ գումարելի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տեղադրվում են նույն կետից, և որպես գումար է վերցվում նրանցով կազմված զուգահեռագծի այն ուղղորդված անկյունագիծը, որի սկզբնակետը գումարելի վեկտորների ընդհանուր սկզբնակետն է (նկ. 52):

բ) Գումարի հատկությունները

Վեկտորները գումարելիս կարող ենք օգտվել հետևյալ հատկություններից: *Ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.*

ա) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (տեղափոխական հատկություն),

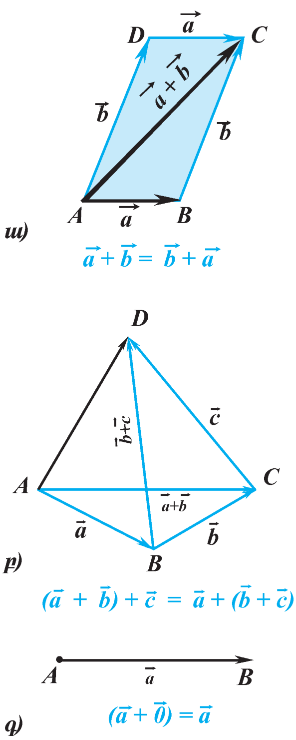
բ) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (զուգորդական հատկություն),

գ) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (զրոյական գումարելիի հատկություն):

Նկար 53 ա,բ,գ-ում լուսաբանված են այդ հատկությունները: Դրանցից յուրաքանչյուրը կարելի է ապացուցել՝ օգտվելով, մասնավորապես, երեք կետերի կանոնից (տե՛ս նաև Ա-7 խնդիրը):

Ապացուցենք, օրինակ, գ) հատկությունը:

Դիցուք՝ տրված է $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ վեկտորը: Այդ դեպքում $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$:



Նկ. 53

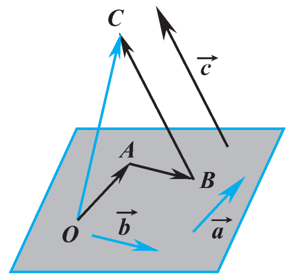
Պարզաբանում

Օգտվելով վերոհիշյալ հատկություններից՝ կարող ենք գտնել նաև երկուսից ավելի վեկտորների գումարը:

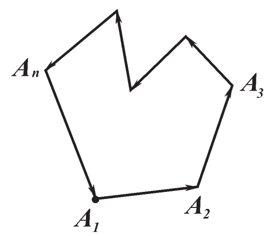
---

* Գործածվում է նաև *«Եռանկյան կանոն»* անվանումը, սակայն «Երեք կետերի կանոն» անվանումն ավելի նախընտրելի է, քանի որ երեք կետերը մի ուղղի վրա գտնվելու դեպքում (տես նկ. 50 ա,բ) եռանկյուն չի առաջանում և, ուրեմն, «եռանկյան կանոն» անվանումը կարող է ապակողմնորոշել:

Մի քանի վեկտորների գումարումը կատարվում է դրանց զույգերի գումարը հաջորդաբար գտնելու միջոցով: Օրինակ՝ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = ((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})+\vec{d}$: Ընդ որում՝ գումարման ա) և բ) հատկություններից հետևում է, որ հաջորդական զույգերի ընտրությունը կարող է և տարբեր լինել, օրինակ՝ $\vec{a}+((\vec{b}+\vec{c})+\vec{d}) = (\vec{a}+\vec{b})+(\vec{c}+\vec{d})$: Երկրաչափական կառուցումներում մի քանի վեկտորները գումարվում են հետևյալ կերպ. որևէ կետից տեղադրվում է վեկտորներից մեկը, այնուհետև դրա վերջնակետից՝ մյուս վեկտորը, վերջինիս վերջնակետից՝ երրորդը, և այդպես նաև հաջորդները (պատկերավոր ասած՝ կառուցում ենք «վեկտորական բեկյալ», որի օղակները գումարելի վեկտորներ են): Այդ դեպքում որպես գումար է վերցվում այն վեկտորը, որի սկզբնակետը գումարվող վեկտորներից առաջինի սկզբնակետն է, իսկ վերջնակետը՝ վերջին վեկտորի վերջնակետը (նկ. 54): Գումարման գործողության նկարագրությունից ելնելով՝ կարող ենք երեք կետերի կանոնն ընդհանրացնել և ձևակերպել *մի քանի կետերի կանոնը**.



$\vec{OC} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
Նկ. 54



Նկ. 55

Կամայական $A_1, A_2, \ldots, A_n$ կետերի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը. $\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\ldots+\vec{A_{n-1}A_n}=\vec{A_1A_n}$:

Նկատենք, որ եթե այդպիսի հաջորդական տեղադրումների արդյունքում գումարվող վեկտորներից առաջինի սկզբնակետն ու վերջինի վերջնակետը համընկնում են (առաջանում է «վեկտորական փակ բեկյալ»), ապա գումարը հավասարվում է զրոյական վեկտորի (նկ. 55).

$\vec{A_1A_2}+\vec{A_2A_3}+\ldots+\vec{A_{n-1}A_n}+\vec{A_1A_n}=\vec{0}$:

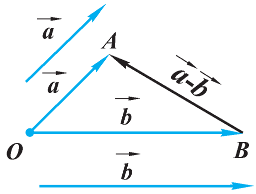
5.2. Վեկտորների հանումը: Հակադիր վեկտորներ

Վեկտորների հանումը վեկտորների գումարման հակադարձ գործողությունն է: *$\vec{a}$ վեկտորից հանել $\vec{b}$ վեկտորը՝ նշանակում է գտնել մի այնպիսի վեկտոր, որը գումարելով $\vec{b}$ վեկտորին՝ ստացվում է $\vec{a}$ վեկտորը:* $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը նշանակում է $\vec{a}-\vec{b}$: Ուրեմն՝

$$\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}: \qquad (1)$$

Պարզենք այն հարցը, թե տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համար ինչպե՞ս կառուցել $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորը: Դրա համար տարածության կամայական O կետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$ և $\vec{OB}=\vec{b}$ վեկտորները (նկ. 56): Ըստ երեք կետերի կանոնի՝

* Գործածվում է նաև *«բազմանկյան կանոն»* անվանումը:



Նկ. 56

$\vec{OB}+\vec{BA}=\vec{OA}$, այսինքն՝ $\vec{b}+\vec{BA}=\vec{a}$: Ուրեմն՝ $\vec{BA}$-ն այն վեկտորն է, որը գումարելով $\vec{b}$ վեկտորին՝ ստացվում է $\vec{a}$ վեկտորը: Իսկ դա նշանակում է, որ $\vec{BA}$-ն որոնելի վեկտորն է, այսինքն՝ $\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}$:

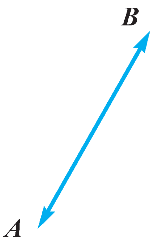
Այսպիսով՝ $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորը կառուցելու համար տանում ենք միևնույն կետից տեղադրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վերջնակետերը միացնող հատվածը և որպես ուղղություն վերցնում $\vec{b}$-ի վերջնակետից դեպի $\vec{a}$-ի վերջնակետը:

Երկու վեկտորների տարբերությունը կարելի է կառուցել նաև այլ եղանակով՝ օգտվելով *հակադիր վեկտորի հասկացությունից*:

Սահմանում. ***Երկու վեկտորներ, որոնց գումարը զրոյական վեկտոր է, կոչվում են հակադիր վեկտորներ:***

$\vec{a}$ վեկտորի հակադիրը նշանակվում է $-\vec{a}$: Ուրեմն, ըստ սահմանման՝

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}: \qquad (2)$$



$\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$

Նկ. 57

Այս հավասարությունից հետևում է, որ $\vec{a}$ վեկտորի հակադիրը ներկայացնում է զրոյական վեկտորի և $\vec{a}$ վեկտորի տարբերությունը՝

$$-\vec{a}=\vec{0}-\vec{a}: \qquad (3)$$

Եթե $\vec{AB}$-ն ոչ զրոյական վեկտոր է, ապա ըստ վեկտորների գումարման կանոնի՝ $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$: Ուրեմն՝ $\vec{BA}$-ն և $\vec{AB}$-ն հակադիր վեկտորներ են. $\vec{BA}=-\vec{AB}$: Բայց $\vec{AB}$-ն և $\vec{BA}$-ն մոդուլով հավասար հակուղղված վեկտորներ են (նկ. 57): Այսպիսով՝ ոչ զրոյական հակադիր վեկտորների մոդուլները հավասար են, և դրանք հակուղղված են: Իսկ զրոյական վեկտորի հակադիրը ևս զրոյական վեկտոր է, քանի որ, եթե $\vec{0}+\vec{b}=\vec{0}$ ապա $\vec{b}=\vec{0}$:

Պարզաբանում

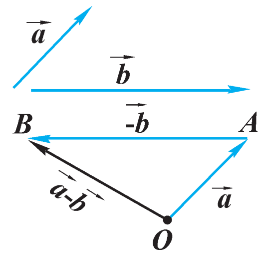
Վեկտորների հանման գործողությունը որոշակի կապ ունի հակադիրի հետ: Ինչպես որ հանրահաշվում երկու թվերի կամ արտահայտությունների տարբերությունը հակադիրի միջոցով կարելի է փոխարինել գումարումով, այնպես էլ նմանօրինակ փոխարինում կարելի է անել վեկտորների համար: Ցույց տանք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորի և $\vec{b}$-ի հակադիրի գումարին.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}): \qquad (4)$$

Իսկապես, (1) հավասարությունից կարող ենք գրել $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$, և հավասարության երկու մասում գումարելով $-\vec{b}$, կստանանք $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b})$: Նկատի ունենալով, որ $\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{0}$, և, օգտվելով զրոյական գումարելիի հատկությունից, կստանանք՝

$(\vec{a}-\vec{b})+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b})$, կամ՝ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$:

(4) հավասարությունը հնարավորություն է ընձեռում տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը կառուցել հետևյալ եղանակով. $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորը կառուցելու համար պարզապես պետք է $\vec{a}$ վեկտորին գումարել $\vec{b}$ վեկտորի հակադիրը (նկ. 58):

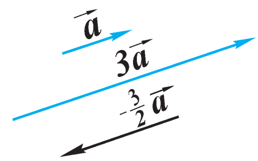


Նկ. 58

5.3. Վեկտորի բազմապատկումը թվով

Տարածաչափության մեջ վեկտորի ու թվի արտադրյալը սահմանվում է այնպես, ինչպես հարթաչափության մեջ:

Սահմանում. ***Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալ կոչվում է այն վեկտորը, որի մոդուլն է $|\vec{k}||\vec{a}|$, և որը $k\geq 0$ դեպքում համուղղված է $\vec{a}$ վեկտորին, իսկ $k<0$ դեպքում՝ հակուղղված: Զրոյական վեկտորի և կամայական թվի արտադրյալ է կոչվում զրոյական վեկտորը:***



Նկ. 59

$\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալը նշանակվում է $k\cdot\vec{a}$ կամ $k\vec{a}$: Նկար 59-ում պատկերված են $\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\frac{3}{2}\vec{a}$ վեկտորները: Օգտվելով սահմանումից՝ կարող ենք ցույց տալ, որ՝

ա) $\vec{a}$ և $k\vec{a}$ վեկտորները համագիծ են՝ $\vec{a}\,||\,k\vec{a}$,

բ) $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$,

գ) $k\cdot\vec{0}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$,

դ) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ և $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$:

Վեկտորի և թվի արտադրյալն օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով: *Ցանկացած k, m թվերի և կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.*

1. $(km)\,\vec{a}=k\,(m\vec{a})$ (զուգորդական հատկություն),

2. $(k+m)\,\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ (բաշխական առաջին հատկություն),

3. $k\,(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (բաշխական երկրորդ հատկություն):

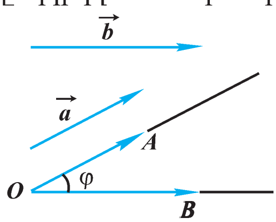
Վեկտորների այս հատկությունները մեզ ծանոթ էին հարթաչափությունից: Ավելին, նույնանուն հատկությունների մենք հանդիպել ենք նաև հանրահաշվի դասընթացում՝ թվերի և մեծությունների հետ գործողություններ կատարելիս: Պարզվում է, որ որոշակի ընդհանրություններ կան վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների և հանրահաշվական գործողությունների միջև: Այդ հանգամանքը թույլ է տալիս վեկտորների գումար, տարբերություն և վեկտորի ու թվի արտաղրյալ պարունակող արտահայտությունները ձևափոխելիս կատարել այնպի-սի քայլեր (փակագծերի բացում, նման անդամների միացում և այլն), ինչպես ար-վում է հանրահաշվական արտահայտություններ ձևափոխելիս:

Օրինակ՝ $\vec{q} = 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} + 2\vec{c}) + 4(\vec{c} - \vec{b})$ արտահայտությունը կարող ենք ձևափոխել այսպես. $\vec{q} = 3\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{a} - 4\vec{c} + 4\vec{c} - 4\vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$:

5.4. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

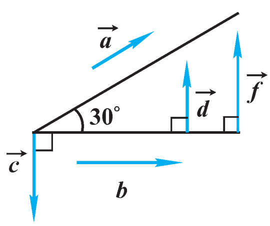
ա) Երկու վեկտորների կազմած անկյունը

Քանի որ տարածության մեջ տրված կամայական երկու վեկտոր կարելի է տե-ղադրել նույն կետից, ուրեմն կարող ենք ընդունել, որ ցանկացած երկու վեկտոր ընդգրկվում են մի հարթության մեջ: Դրանից ելնելով՝ կարող ենք ներմուծել *երկու վեկտորների կազմած անկյան* հասկացությունը:



Նկ. 60

Վերցնենք կամայական երկու $\vec{a}$ ու $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորներ և դրանք տեղադրենք որևէ O կետից՝ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (նկ. 60): Եթե $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն համուղղված վեկտորներ չեն, ապա OA և OB ճառագայթները կազմում են AOB անկյուն: Ընդ որում՝ այդ անկյան մեծությունը կախում չունի O կետի ընտրությունից, քանի որ, ինչպես գիտենք, համապատասխանաբար համուղղված կողմերով ան-կյունները հավասար են: Նկարագրված անկյան մեծու-թյունը նշանակենք φ: Այդ դեպքում կասենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը φ է: Իսկ եթե $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն համուղղված վեկտորներ են (այդ թվում նաև՝ երբ դրան-ցից մեկը կամ երկուսը զրոյական են), կասենք, որ նրանց կազմած անկյունը 0° է: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը սովորաբար նշանակվում է $\angle(\vec{a}, \vec{b})$: Նկար 61-ում պատկերված են մի քանի վեկտորներ, որոնց կազմած անկյունների համար կարող ենք գրել. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120°$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90°$, $\angle(\vec{d}, \vec{f}) = 0°$, $\angle(\vec{c}, \vec{f}) = 180°$ և այլն:



Նկ. 61

Այն երկու վեկտորները, որոնց կազմած անկյունը 90° է, կոչվում են *ուղղահա-յաց (փոխուղղահայաց)* վեկտորներ: Նկար 61-ում պատկերված վեկտորներից $\vec{c} \perp \vec{b}$, $\vec{d} \perp \vec{b}$, $\vec{f} \perp \vec{b}$:

բ) Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

Օգտվելով երկու վեկտորների կազմած անկյան հասկացությունից՝ կարող ենք ներմուծել վեկտորների հետ կատարվող մի գործողություն ևս՝ *վեկտորների սկալյար բազմապատկումը:*

Սահմանում. ***Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալ կոչվում է դրանց մոդուլների և այդ վեկտորների կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալը:***

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը նշանակվում է $\vec{a}\cdot\vec{b}$ կամ $\vec{a}\,\vec{b}$: Ուրեմն, ըստ սահմանման՝ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$:

Նկատենք, որ հավասարության ձախ մասում գրված են բազմապատկվող վեկտորներ, իսկ աջ մասում բազմապատկման արդյունքը վեկտոր չէ, այն արտահայտվում է թվային մեծությամբ*: Ընդ որում, եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից գոնե մեկը զրոյական վեկտոր է, ապա սկալյար արտադրյալը հավասար է 0-ի: Իսկ եթե բազմապատկվում են ոչ զրոյական վեկտորներ, ապա արտադրյալի նշանը կախված է վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսի նշանից: Մասնավորապես, եթե կազմած անկյունը 90° է, այսինքն՝ վեկտորները փոխուղղահայաց են, ապա քանի որ $\cos 90^{\circ}=0$, ուրեմն սկալյար արտադրյալը 0 է: Ճշմարիտ է նաև հակադարձը: Այսպիսով՝ *երկու ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալը զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ բազմապատկվող վեկտորները փոխուղղահայաց են.* այսինքն՝ ա) եթե $\vec{a}\perp\vec{b}\ (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$, ապա $\vec{a}\,\vec{b}=0$,

բ) եթե $\vec{a}\,\vec{b}=0\ (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$, ապա $\vec{a}\perp\vec{b}$:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է մի շարք հատկություններով, որոնց կանդրադառնանք հետագայում:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

126. Ավտոմեքենան A քաղաքից շարժվեց դեպի արևելք 60 կմ՝ մինչև B քաղաք, այնուհետև դեպի հյուսիս 45 կմ՝ մինչև C քաղաք: Գծագրով պատկերեք այն վեկտորները, որոնք արտահայտում են ավտոմեքենայի շարժումները, և որոշեք նրա տեղափոխությունը A-ից մինչև C քաղաք:
127. Մրջյունն սկզբից 95 սմ գնաց դեպի արևելք, այնուհետև 65 սմ դեպի արևմուտք, իսկ հետո՝ 40 սմ դեպի հարավ: Գծագրով պատկերեք այն վեկտորները, որոնք արտահայտում են մրջյունի շարժումը, և գտեք՝ **ա)** մրջյունի անցած ճանապարհը, **բ)** տեղափոխությունը:
128. Տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, և $|\vec{a}|>|\vec{b}|$: Ի՞նչ ուղղություն ունի $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորը: Դիտարկեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համուղղված և հակուղղված լինելու դեպքերը և յուրաքանչյուր դեպքի համար նշեք, թե ինչպես գտնել $\vec{c}$ վեկտորի մոդուլը:

---

* «Սկալյար արտադրյալ» անվանումը հենց հուշում է, որ գործողության արդյունքում ստացվում է ոչ թե վեկտորական, այլ սկալյար մեծություն: Ծանոթության կարգով ասենք, որ մաթեմատիկայում դիտարկվում է մեկ ուրիշ գործողություն ևս՝ *վեկտորական արտադրյալը*, որի արդյունքն արդեն վեկտորական մեծություն է (մենք այդ գործողությունը չենք ուսումնասիրի):

129. Ըստ նկար 48-ում պատկերված զուգահեռանիստի՝ նշեք այն վեկտորը, որի ծայրակետերը նկարում նշված կետեր են, և որը հավասար է հետևյալ գումարին՝ **ա)** $\vec{AD}+\vec{AB}$, **բ)** $\vec{AB}+\vec{CC_1}$, **գ)** $\vec{CC_1}+\vec{D_1K}$, **դ)** $\vec{AC}+\vec{D_1A_1}$, **ե)** $\vec{DD_1}+\vec{MB_1}$:

130. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզման: Ի՞նչ վեկտոր պետք է տեղադրել $\vec{x}$ վեկտորի փոխարեն, որպեսզի տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝ **ա)** $\vec{AC}+\vec{x}=\vec{AA_1}+\vec{A_1C_1}$, **բ)** $(\vec{AA_1}+\vec{A_1B_1})+\vec{x}=\vec{AB}$, **գ)** $\vec{AC}+\vec{x}=\vec{A_1C_1}$, **դ)** $\vec{BC}+\vec{x}=\vec{0}$:

131. A, B, C և D կետերն ընկած չեն մի հարթության մեջ: Արդյոք ճշմարի՞տ է, որ՝ **ա)** $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{CA}$, **բ)** $(\vec{AB}+\vec{CD})+\vec{BC}=\vec{AD}$, **գ)** $\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AC}+\vec{CD}$, **դ)** $\vec{AB}+(\vec{BC}+\vec{CA})=\vec{0}$, **ե)** $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AC}+\vec{BD}$:

132. Տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, և $|\vec{a}|>|\vec{b}|$: Ի՞նչ ուղղություն ունի $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորը: Դիտարկեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համուղղված և հակուղղված լինելու դեպքերը և նշեք, թե ինչպես գտնել $\vec{d}$ վեկտորի մոդուլը:

133. A, B, C և D կետերը քառանիստի գագաթներ են: Ընտրեք ճշմարիտ պնդումները. **ա)** $\vec{AB}-\vec{CB}=\vec{AC}$, **բ)** $\vec{DC}-\vec{AD}=\vec{CA}$, **գ)** $(\vec{BD}-\vec{CD})+\vec{CA}=\vec{BA}$, **դ)** $(\vec{AB}-\vec{CB})-\vec{CA}=\vec{0}$:

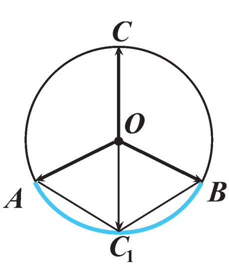
134. Նշեք այն վեկտորները, որոնց ծայրակետերը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի գագաթներ են և որոնք՝ **ա)** հակադիր են $\vec{AD}$ վեկտորին, **բ)** հակադիր են $\vec{AD_1}$ վեկտորին, **գ)** հակադիր են $\vec{AB}+\vec{AD}$ վեկտորին, **դ)** հավասար են $-\vec{C_1C}$ վեկտորին, **ե)** հավասար են $\vec{AD}-\vec{AB}$ վեկտորին:

135. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\vec{AB}-\vec{CB}+\vec{AA}$,	**դ)** $\vec{AC}+\vec{BC}-\vec{DC}-\vec{AD}$,
բ) $\vec{AB}+\vec{BC}-\vec{CC}$,	**ե)** $\vec{AD}+\vec{EK}+\vec{MP}-\vec{MD}-\vec{EP}$,
գ) $\vec{AB}-\vec{CB}+\vec{DE}-\vec{DC}$,	**զ)** $\vec{AC}-\vec{AP}-\vec{BC}+\vec{BM}-\vec{PM}$:

136. O կենտրոնով շրջանագիծը A, B և C կետերով բաժանված է երեք հավասար մասերի: Ցույց տվեք, որ $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ և $\vec{OC}$ ուժերի համազորը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$:

Լուծում. CO հատվածը շարունակենք մինչև շրջանագծի հետ C_1 կետում հատվելը, և C_1 կետը հատվածներով միացնենք A և B կետերին (նկ. 62): Ստացվում է OAC_1B զուգահեռագիծ: Ունենք՝ $\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OC_1}$: Դժվար չէ նկատել, որ $\vec{OC}=-\vec{OC_1}$: Հետևաբար՝
$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OC_1}+\vec{OC}=\vec{OC_1}+(-\vec{OC_1})=\vec{0}$:



Նկ. 62

137. Ի՞նչ թվով պետք է բազմապատկել ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորը, որպեսզի ստացվի հետևյալ պայմաններից բավարարող $\vec{b}$ վեկտոր.

ա) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ և $|\vec{b}|=|\vec{a}|$, **գ)** $\vec{b}\parallel\vec{a}$ և $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$,

բ) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ և $|\vec{b}|=|\vec{a}|$, **դ)** $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ և $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$:

138. k-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $k\vec{a}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$ վեկտորի մոդուլը՝ **ա)** հավասար է $\vec{a}$ վեկտորի մոդուլին, **բ)** մեծ է $\vec{a}$ վեկտորի մոդուլից, **գ)** փոքր է $\vec{a}$ վեկտորի մոդուլից:

139. Տրված են ոչ զրոյական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ, ընդ որում $\vec{b}=-2\vec{a}$: Որոշեք, թե $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $0{,}8\,\vec{a}$ և $3\vec{a}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրն ինչպե՞ս է ուղղված $\vec{b}$ վեկտորի նկատմամբ: Այդ վեկտորների մոդուլներն արտահայտեք $|\vec{b}|$-ի միջոցով:

140. $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Գտեք x-ը, եթե՝ **ա)** $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{CD}$, **բ)** $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AO}$, **գ)** $\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{BD}$, **դ)** $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{CA}$, **ե)** $\overrightarrow{AO}=x(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$:

141. Ապացուցեք, որ ոչ զրոյական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի այնպիսի x թիվ, որ $\vec{a}=x\vec{b}$:

Լուծում. Եթե գոյություն ունի այնպիսի x թիվ, որ $\vec{a}=x\vec{b}$, ապա ըստ վեկտորի ու թվի արտադրյալի սահմանման՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են (համուղղված կամ հակուղղված են՝ կախված x թվի նշանից): Ցույց տանք, որ ճշմարիտ է նաև հակադարձ պնդումը: Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն համագիծ են. $\vec{a}\parallel\vec{b}$, ընդ որում $\vec{a}\neq\vec{0}$ և $\vec{b}\neq\vec{0}$: Հնարավոր է երկու դեպք՝ $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ և $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$:

$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ դեպքում որպես x կվերցնենք $x=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ թիվը: Քանի որ x>0, ապա $\vec{b}$ և $x\vec{b}$ վեկտորները կլինեն համուղղված և, ուրեմն, համուղղված կլինեն նաև $\vec{a}$ և $x\vec{b}$ վեկտորները: Բացի այդ, $|x\vec{b}|=|x||\vec{b}|=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}|\vec{b}|=|\vec{a}|$: Ստացվում է, որ $\vec{a}$ և $x\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, և նրանց մոդուլները հավասար են: Դա նշանակում է, որ $\vec{a}=x\vec{b}$:

$\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ դեպքում որպես x կվերցնենք $x=-\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ թիվը: Քանի որ x<0, ապա $\vec{b}$ և $x\vec{b}$ վեկտորները ևս կլինեն հակուղղված, ուրեմն $\vec{a}$ և $x\vec{b}$ վեկտորները կլինեն համուղղված: Բացի այդ, $|x\vec{b}|=|x||\vec{b}|=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}|\vec{b}|=|\vec{a}|$:

Հետևաբար՝ $\vec{a}=x\vec{b}$:

142*. Ապացուցեք, որ եթե A, B և C երեք կետերն այնպիսին են, որ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$, որտեղ k-ն որևէ թիվ է, ապա այդ կետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

143. Ձևակերպեք և ապացուցեք նախորդ խնդրում արտահայտված պնդման հակադարձ պնդումը:

144. Պարզեցրեք արտահայտությունը.
ա) $3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{a}-\vec{b})-4\vec{b}$,
բ) $\vec{a}-3(\vec{b}-3\vec{a}+\vec{c})+2(\vec{c}-5\vec{a})$:

145. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են 40° անկյուն: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը՝
ա) $\vec{a}$ և $-\vec{b}$, **բ)** $-\vec{a}$ և $\vec{b}$, **գ)** $-\vec{a}$ և $-\vec{b}$, **դ)** $\vec{a}$ և $-\vec{a}$:

146. Տրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը՝ **ա)** $\overrightarrow{AA_1}$ և $\overrightarrow{BC}$, **բ)** $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{B_1B}$, **գ)** $\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{DD_1}$, **դ)** $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{DC_1}$ **ե)** $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{B_1A}$, **զ)** $\overrightarrow{AA_1}$ և $\overrightarrow{CC_1}$, **է)** $\overrightarrow{DD_1}$ և $\overrightarrow{B_1B}$:

147. Մարմնի մի կետում ազդում են $\vec{F_1}$ և $\vec{F_2}$ ուժեր, որոնք իրար հետ կազմում են 90° անկյուն: Իմանալով, որ $|\vec{F_1}|=6$Ն, $|\vec{F_2}|=4{,}5$Ն, գտեք համազոր ուժի մոդուլը:

148. Հաշվեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե հայտնի է, որ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, իսկ նրանց կազմած անկյունը հավասար է՝ **ա)** 45°, **բ)** 90°, **գ)** 120°:

149. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը ի՞նչ պայմանների դեպքում է՝ **ա)** դրական, **բ)** բացասական, **գ)** զրո:

150. $\vec{m}$ և $\vec{n}$ վեկտորների մոդուլները հավասար են m և n: Ինչի՞ է հավասար $\vec{m}\cdot\vec{n}$ սկալյար արտադրյալը, եթե՝ **ա)** $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, **բ)** $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, **գ)** $\vec{m}\perp\vec{n}$, **դ)** $\angle(\vec{m},\vec{n})=120^\circ$:

151. Տրված է, որ $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$: Գտեք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է՝ **ա)** 24, **բ)** 12, **գ)** -24, **դ)** 0, **ե)** $12\sqrt{3}$, **զ)** $-12\sqrt{2}$:

152. $DABC$ կանոնավոր քառանիստի կողը 8 սմ է, K կետը BC կողի միջնակետն է: Գտեք հետևյալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը. **ա)** $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{DC}$, **բ)** $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{CK}$, **գ)** $\overrightarrow{DK}$ և $\overrightarrow{BC}$:

153. Կառուցեք $ABCD$ քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն ընդգրկում է $\overrightarrow{BC}$ և $\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ վեկտորները:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

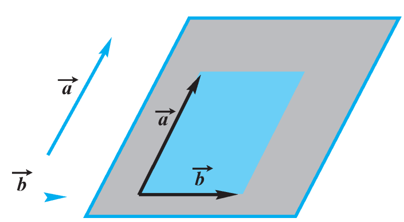
1. **Քննարկեք և փորձեք պարզել, թե ի՞նչ հիմնական նմանություններ ու տարբերություններ կան մինչ այժմ ձեզ ծանոթ՝ հարթության վրա տրված վեկտորների և այժմ ուսումնասիրած՝ տարածության մեջ տրված վեկտորների հետ կատարվող նույնանուն գործողությունների ու դրանց հատկությունների միջև:**

2. **Ֆիզիկայից ձեզ հայտնի է, որ աշխատանքը էներգիայի քանակական փոփոխությունը բնութագրող մեծություն է: Մասնավորապես՝ մեխանիկական աշխատանքը մարմնի տեղափոխության և դրա ուղղությամբ ազդող ուժի արտադրյալն է: Եթե ազդող ուժը տեղափոխության ուղղության հետ կազմում է α անկյուն, ապա աշխատանքը հավասար է ուժի և տեղափոխության բացարձակ մեծությունների և α անկյան կոսինուսի արտադրյալին:**
Աշխատանքի սահմանումը ձևակերպեք՝ օգտագործելով վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Դիտարկեք այն հարցը, թե հաստատուն ուժի ազդեցությամբ կատարված աշխատանքը ո՞ր դեպքում կլինի՝ ա) դրական, բ) զրո, գ) բացասական: Պարզեք նաև, թե տեղափոխում և արգելում կատարող ուժերից յուրաքանչյուրի կատարած աշխատանքը ո՞ր դեպքում կլինի մեծագույն և ո՞ր դեպքում՝ փոքրագույն:
Ձեր դիտարկումների արդյունքները լուսաբանեք ցուցապաստառով:

§ 6 ՀԱՄԱՀԱՐԹ ԵՎ ՏԱՐԱՀԱՐԹ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

6.1. Համահարթ վեկտորներ

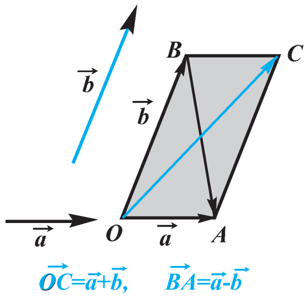
Եթե վեկտորը ներկայացնող ուղղորդված հատվածի բոլոր կետերն ընկած են որևէ հարթության մեջ, ապա կասենք, որ *վեկտորն ընկած է այդ հարթության մեջ*: Պարզ է, որ եթե տրված վեկտորի ծայրակետերն ընկած են որևէ հարթության մեջ, ապա ինքը՝ վեկտորը, ևս ընկած է այդ նույն հարթության մեջ:



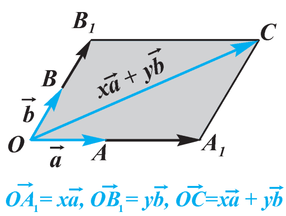
Նկ. 63

Ակնհայտ է, որ ցանկացած երկու վեկտորներ նույն կետից տեղադրելիս կընկնեն մի հարթության մեջ (նկ. 63): Իսկ ինչպիսի՞ն է պատկերը երեք վեկտորների դեպքում: Պարզվում է, որ մի կետից տեղադրելիս կամայական երեք վեկտորները կարող են ընկնել մի հարթության մեջ, բայց կարող են նաև մի հարթության մեջ չընկնել:

Սահմանում. ***Երեք (կամ ավելի) վեկտորները, որոնք նույն կետից տեղադրելիս ընկնում են մի հարթության մեջ, կոչվում են համահարթ վեկտորներ:***



Նկ. 64



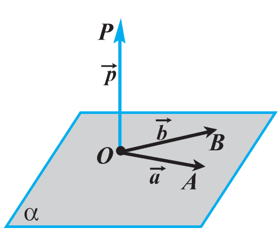
Նկ. 65

Համահարթ վեկտորների պարզ օրինակներ են այնպիսի երեք վեկտորները, որոնցից մեկը զրոյական վեկտոր է, կամ երկուսը համագիծ են (այսինքն՝ մի կետից տեղադրելիս ընկնում են միևնույն ուղղի վրա): Դժվար չէ համոզվել, որ համահարթ են նաև այնպիսի երեք վեկտորները, որոնցից մեկը մյուս երկուսի գումարն է կամ տարբերությունը (նկ. 64):

Ներկայացնենք երեք համահարթ վեկտորների մի ընդհանրական օրինակ: Դիցուք՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են: Որպես երրորդ վեկտոր վերցնենք $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ վեկտորը, որտեղ x-ը և y-ը կամայական թվեր են: Պարզվում է, որ այդպիսի $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են (նկ. 65, նկարում վերցված է $x>0$, $y>0$ դեպքը): Իսկապես, քանի որ $\vec{a}$ և $x\vec{a}$, ինչպես նաև $\vec{b}$ և $y\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ուրեմն՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $x\vec{a}$ և $y\vec{b}$ վեկտորները համահարթ են: Դրանից հետևում է, որ $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ վեկտորը ևս ընկած է այն նույն հարթության մեջ, որում ընկած են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները:

Պարզաբանում

Հիշենք, որ միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացում դիտարկել ենք *վեկտորի վերածումն ըստ երկու տարագիծ վեկտորների*: Ապացուցել ենք, որ ցանկացած վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված երկու տարագիծ վեկտորների, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները որոշվում են միակ ձևով: Այսինքն, ցույց ենք տվել, որ եթե $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տարագիծ վեկտորներ են, ապա ցանկացած $\vec{p}$ վեկտորի համար գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշվող այնպիսի x և y թվեր, որ $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$: Այստեղ մենք պետք է կատարենք մի վերապահում, որը վերաբերում է «ցանկացած $\vec{p}$ վեկտոր» արտահայտության գործածմանը: Բանն այն է, որ միջին դպրոցի հարթաչափության դասընթացում մենք դիտարկել ենք հարթության վրա տրված վեկտորներ և «ցանկացած $\vec{p}$ վեկտոր» ասելով՝ նկատի ենք ունեցել միայն այն վեկտորները, որոնք ընկած են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ընդգրկող հարթության մեջ: Վեկտորի վերածմանը վերաբերող վերոհիշյալ պնդումը, փաստորեն, ապացուցված է միայն միևնույն հարթության մեջ ընկած (այսինքն՝ համահարթ) վեկտորների համար: Սակայն տարածության մեջ ամեն վեկտոր չէ, որ ընկած է այն նույն հարթության մեջ, որում ընկած են նախապես տրված երկու տարագիծ վեկտորները: Օրինակ, նկար 66-ում պատկերված է այնպիսի $\vec{p}$ վեկտոր, որի P վերջնակետը



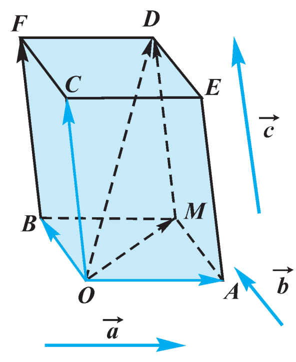
Նկ. 66

գտնվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ընդգրկող α հարթությունից դուրս: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ վեկտորները համահարթ վեկտորներ չեն: Ուրեմն՝ $\vec{p}$ վեկտորը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով վերածել հնարավոր չէ, քանի որ ցանկացած x և y թվերի դեպքում, ինչպես գիտենք, $x\vec{a}+y\vec{b}$ վեկտորն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ $\vec{p}$ վեկտորը՝ ոչ:

6.2. Տարահարք վեկտորներ

Ինչպես տեսանք, տարածության մեջ միևնույն կետից տեղադրված երեք վեկտորների համար հնարավոր է, որ դրանք մի հարթության մեջ ընկած չլինեն:

Սահմանում. ***Երեք (կամ ավելի) վեկտորները, որոնք նույն կետից տեղադրելիս մի հարթության մեջ չեն ընկնում, կոչվում են տարահարք վեկտորներ:***

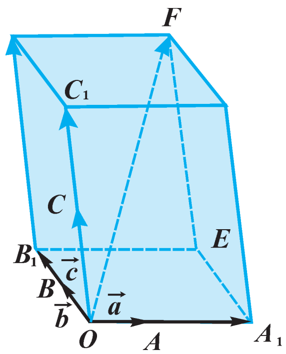


Նկ. 67

Նկար 67-ում պատկերված է զուգահեռանիստ, որը կառուցված է տրված $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների միջոցով: O գագաթից ելնող $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ և $\vec{OC}=\vec{c}$ վեկտորները տարահարք են: Տարահարք են նաև, օրինակ, $\vec{OA}$, $\vec{OM}$ և $\vec{BF}$ վեկտորները, իսկ, ասենք, $\vec{OM}$, $\vec{MD}$ և $\vec{OD}$ վեկտորները տարահարք չեն: Այսպիսով, տարածության մեջ դիտարկվող երեք կամ ավելի վեկտորները կարող են լինել կա՛մ համահարք, կա՛մ տարահարք:

Նկատենք, որ երեք տարահարք վեկտորների գումարը կարելի է գտնել զուգահեռանիստ կառուցելու եղանակով: Դա կարող ենք անել հետևյալ կերպ: Տրված $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ տարահարք վեկտորների գումարը գտնելու համար տարածության որևէ O կետից տեղադրում ենք $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ և $\vec{OC}=\vec{c}$ վեկտորները: Այնուհետև դրանց վրա կառուցում ենք զուգահեռանիստ, այսինքն՝ պատկերում ենք այնպիսի զուգահեռանիստ, որի համար OA, OB և OC հատվածները լինեն ընդհանուր գագաթով կողեր (տե՛ս նկ. 67): Այդ դեպքում $\vec{OD}=\vec{d}$ ուղղորդված անկյունագիծը ներկայացնում է $\vec{OM}$ և $\vec{MD}$ վեկտորների գումարը: Եվ քանի որ $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}=\vec{a}+\vec{b}$, իսկ $\vec{MD}=\vec{OC}=\vec{c}$, ուրեմն՝ $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$:

Այսպիսով, *երեք տարահարք վեկտորների գումարը հավասար է նույն կետից տեղադրելիս դրանց վրա կառուցված զուգահեռանիստի այն ուղղորդված անկյունագծին, որի սկզբնակետը տվյալ կետն է*: Երեք տարահարք վեկտորների գումարման այս կանոնը կրում է *զուգահեռանիստի կանոն* անվանումը: Նկատենք, որ այն համանման է երկու տարագիծ վեկտորների գումարման՝ զուգահեռագծի կանոնին:



$\overrightarrow{OA_1}=x\vec a$, $\overrightarrow{OB_1}=y\vec b$, $\overrightarrow{OC_1}=z\vec c$

$\vec f=\overrightarrow{OF}=x\vec a+y\vec b+z\vec c$

Նկ. 68

Պարզաբանում

Օգտվելով զուգահեռանիստի կանոնից՝ կարող ենք տրված $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ տարահարթ վեկտորների միջոցով կառուցել ոչ միայն $\vec d=\vec a+\vec b+\vec c$, այլև $\vec f=x\vec a+y\vec b+z\vec c$ վեկտորը, որտեղ x-ը, y-ը և z-ը կամայական թվեր են: Դրա համար նախ կտանենք $\vec a$-ին համագիծ $x\vec a$, $\vec b$-ին համագիծ $y\vec b$ և $\vec c$-ին համագիծ $z\vec c$ վեկտորները, իսկ այնուհետև, ըստ զուգահեռանիստի կանոնի, կկառուցենք $x\vec a$, $y\vec b$, $z\vec c$ վեկտորների գումարը (նկ. 68, նկարում պատկերված է $x>0$, $y>0$, $z>0$ դեպքը): Նկատենք, որ մասնավոր դեպքում, երբ x, y, z թվերից մեկը կամ մյուսը զրո է, ապա $\vec f$ վեկտորի կառուցումը հանգում է համահարթ վեկտորների գումարի կառուցման:

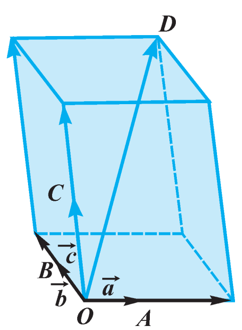
6.3. Վեկտորի վերածումն ըստ տարահարթ վեկտորների

6.1 կետում նշեցինք, որ հարթաչափության դասընթացում դիտարկել ենք վեկտորի վերածումն ըստ երկու տարագիծ վեկտորների: Համանման ձևով տարածաչափության մեջ դիտարկվում է նաև վեկտորի վերածումն ըստ երեք տարահարթ վեկտորների:

Եթե $\vec p$ վեկտորը ներկայացված է $\vec p=x\vec a+y\vec b+z\vec c$ տեսքով, ապա ասում են, որ $\vec p$ վեկտորը վերածված է ըստ $\vec a$, $\vec b$ և $\vec c$ վեկտորների: Այդ դեպքում x, y, z թվերը կոչվում են վերածման գործակիցներ:

Վեկտորների վերածման համար կարևոր է հետևյալ հատկությունը:

Դիցուք՝ $\vec a$-ն, $\vec b$-ն և $\vec c$-ն տարահարթ վեկտորներ են: Պարզվում է, որ այդ դեպքում ցանկացած $\vec d$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ վեկտորների, այսինքն՝ ներկայացնել $\vec d=x\vec a+y\vec b+z\vec c$ տեսքով, որտեղ x, y, z թվերը որոշվում են միարժեքորեն: $\vec d$ վեկտորի այդպիսի ներկայացումը ակնառու կարելի է արտահայտել այսպես. պատկերացնենք, որ որևէ O կետից տեղադրված են $\overrightarrow{OA}=\vec a$, $\overrightarrow{OB}=\vec b$, $\overrightarrow{OC}=\vec c$ և $\overrightarrow{OD}=\vec d$ վեկտորները: Այնուհետև տարված են AOB, AOC և BOC հարթությունները, որից հետո D կետից տարված են այդ հարթություններին զուգահեռ հարթություններ (նկ. 69): Արդյունքում առաջանում է զուգահեռանիստ, որի համար $\vec d$ վեկտորը ուղղորդված անկյունագիծ է: Մնում է նկատել, որ այդ զուգահեռանիստի O գագաթից ելնող կողերը ներկայացնում են համապատասխանաբար $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ վեկ-



Նկ. 69

տորների և ինչ որ x, y, z թվերի արտադրյալներ: Այս դատողությունների հիման վրա ապացուցվում է, որ *ցանկացած վեկտոր կարելի է միարժեքորեն վերածել ըստ տրված երեք ոչ համահարթ վեկտորների* (տե՛ս Ա-8 խնդրի լուծումը):

Ծանոթություն

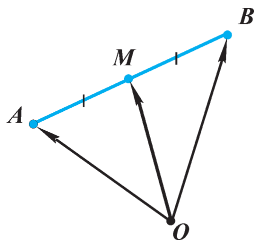
Ինչպես գիտենք, եթե հարթության վրա վերցվում են կամայական երկու տարագիծ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ, ապա այդ հարթության մեջ ցանկացած երրորդ՝ $\vec{p}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների: Նման դեպքում ասում են, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները *գծայնորեն անկախ են*, իսկ $\vec{p}$ վեկտորը *գծայնորեն կախված* է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից: Նման ձևով, եթե տարածության մեջ վերցվում են կամայական երեք $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ տարահարթ վեկտորներ, ապա ցանկացած չորրորդ՝ $\vec{d}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների: Այդ դեպքում ասում են, որ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները *գծայնորեն անկախ են*, իսկ $\vec{d}$ վեկտորը գծայնորեն կախված է $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորներից:

Այսպիսով, երկչափ հարթության մեջ գծայնորեն անկախ վեկտորների թիվը կարող է լինել 2-ից ոչ ավելի, իսկ եռաչափ տարածության մեջ՝ 3-ից ոչ ավելի:

6.4. Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս

Վեկտորների հետ կատարվող գործողությունները շատ նման են թվերի ու մեծությունների հետ կատարվող գործողություններին: Այդ հանգամանքը զգալիորեն հեշտացնում է վեկտորների հետ գործողությունների կատարումը, քանի որ կարողանում ենք օգտվել գործողությունների՝ հանրահաշվից մեզ ծանոթ կանոններից: Դրա շնորհիվ ավելի դյուրին է դառնում վեկտորների կիրառությունը, մասնավորապես, երկրաչափական այնպիսի խնդիրներ լուծելիս, որոնցում հարմար է օգտվել վեկտորներից: Սակայն երկրաչափական խնդիրը վեկտորների օգնությամբ լուծելու համար նախ և առաջ անհրաժեշտ է խնդրի պայմանը փոխադրել («թարգմանել») վեկտորական «լեզվի»: Դրանից հետո, օգտվելով հանրահաշվական կանոններից, կարող ենք գործողություններ կատարել վեկտորների հետ և ստանալ խնդրի վեկտորական լուծումը, իսկ վերջում՝ ստացված վեկտորական լուծումը դարձյալ պետք է փոխադրենք երկրաչափական «լեզվի»: Հենց դա է երկրաչափական խնդրի վեկտորական լուծման էությունը: Բերենք նման լուծման օրինակ՝ նախապես դիտարկելով հետևյալ օժանդակ խնդիրը:

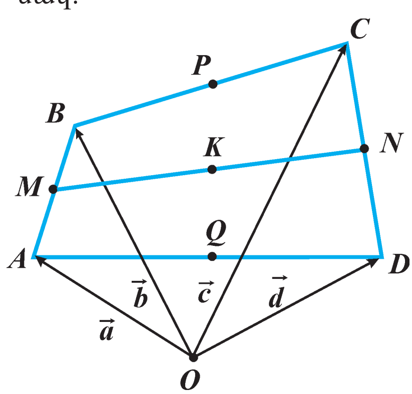
Խնդիր 1. M կետը AB հատվածի միջնակետն է: Ապացուցել, որ տարածության կամայական O կետի համար տեղի ունի $\vec{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$ հավասարությունը (նկ. 70):



Նկ. 70

Լուծում: Ըստ երեք կետերի կանոնի՝ $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$ և $\vec{OM}=\vec{OB}+\vec{BM}$: Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք $2\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{AM}+\vec{BM}$: Քանի որ $\vec{AM}$ և $\vec{BM}$ վեկտորները հակուղղված են, և նրանց մոդուլները հավասար են, ուրեմն՝ $\vec{AM}+\vec{BM}=\vec{0}$: Հետևաբար՝ $2\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{0}$, կամ՝ $\vec{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$:

Այժմ ներկայացնենք երկրաչափական խնդրի վեկտորական լուծման մի օրինակ:



Նկ. 71

Խնդիր 2. M և N կետերը $ABCD$ քառանկյան AB և CD կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ BC, MN և AD հատվածների P, K, Q միջնակետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

Լուծում. Վերցնենք կամայական O կետ և դիտարկենք $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ և $\vec{d}=\vec{OD}$ վեկտորները (նկ. 71):

Ըստ պայմանի՝ M-ը AB հատվածի միջնակետն է, ուրեմն՝

$$\vec{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

(տե՛ս խնդիր 1-ը): Համանման ձևով՝

$$\vec{OP}=\frac{1}{2}\left(\vec{OB}+\vec{OC}\right)=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\quad \vec{ON}=\frac{1}{2}\left(\vec{OC}+\vec{OD}\right)=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}),$$

$$\vec{OQ}=\frac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OD}\right)=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})\qquad \text{և} \qquad \vec{OK}=\frac{1}{2}\left(\vec{OM}+\vec{ON}\right):$$

Այսպիսով, մենք խնդրի պայմանը փոխադրեցինք վեկտորական «լեզվի»: Այժմ կատարենք գործողություններ վեկտորների հետ:

$$\vec{OK}=\frac{1}{2}\left(\vec{OM}+\vec{ON}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{OP}+\vec{OQ}\right):$$

Վերջապես, կատարենք վեկտորական լուծման փոխադրում երկրաչափական «լեզվի»: $\vec{OK}=\frac{1}{2}\left(\vec{OP}+\vec{OQ}\right)$ հավասարությունը ցույց է տալիս, որ K կետը PQ հատվածի միջնակետն է: Իսկապես, PQ հատվածի K_1 միջնակետի համար, ըստ խնդիր 1-ի՝ $\vec{OK_1}=\frac{1}{2}\left(\vec{OP}+\vec{OQ}\right)$: Ուրեմն՝ $\vec{OK}=\vec{OK}_1$, որտեղից էլ բխում է, որ K-ն համընկնում է PQ հատվածի K_1 միջնակետի հետ: Հետևաբար՝ P, K, Q կետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

154. Արդյոք համահա՞րթ են հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, **բ)** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, **գ)** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}-3\vec{b}$, **դ)** $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$:
155. Հայտնի է, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են: Արդյոք համահա՞րթ են հետևյալ վեկտորները՝ **ա)** $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$, **բ)** $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $-(\vec{a}+\vec{c})$ **գ)** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, որտեղ $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$:
156. Որոշեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.
    ա) միևնույն հարթությանը զուգահեռ վեկտորները համահարթ են,
    բ) միևնույն ուղղին ուղղահայաց վեկտորները համահարթ են,
    գ) կամայական երեք վեկտորներ, որոնցից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է տրված երկու հատվող ուղիղներից մեկին, համահարթ են,
    դ) կամայական երեք վեկտորներ, որոնցից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է տրված երկու հատվող ուղիղներից մեկին, համահարթ են,
    ե) կամայական երեք վեկտորներ, որոնցից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է տրված երկու խաչվող ուղիղներից մեկին, համահարթ են:
157. M-ը, N-ը և K-ն $DABC$ քառանիստի համապատասխանաբար AD, BD և CD կողերի միջնակետերն են: Հետևյալ ո՞ր երեք վեկտորներն են համահարթ. **ա)** $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ և $\vec{AM}$, **բ)** $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ և $\vec{MN}$, **գ)** $\vec{DM}$, $\vec{DB}$ և $\vec{BK}$, **դ)** $\vec{KD}$, $\vec{BD}$ և $\vec{CB}$, **ե)** $\vec{DM}$, $\vec{AD}$ և $\vec{BC}$, **զ)** $\vec{BC}$, $\vec{KN}$ և $\vec{AD}$:
158. A և A_1, ինչպես նաև B և B_1 կետերը համաչափ են α հարթության նկատմամբ: Ցույց տվեք, որ $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ և $\vec{AB}$ վեկտորները համահարթ են:
159. M գագաթով կոնի հիմքի շրջանագծի վրա վերցված են A, B և C երեք կետեր: Համահա՞րթ են արդյոք $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ և $\vec{MC}$ վեկտորները (պատասխանը հիմնավորեք):
160. Տրված է, որ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$: Կարո՞ղ են արդյոք $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ չլինել: Ինչո՞ւ:
161. Ի՞նչ պայմանի են բավարարելու $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները, որպեսզի նրանցով հնարավոր լինի ստանալ եռանկյուն:

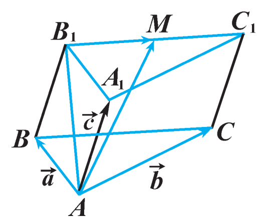
162. Հայտնի է, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները տարահարթ են: Ինչպիսի՞ փոխադասավորություն ունեն այն երկու հարթությունները, որոնցից մեկն ընդգրկում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$, իսկ մյուսը՝ $\vec{c}$ և $\vec{a}$ վեկտորները (պատասխանը հիմնավորել):

163. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը ուղղանկյունանիստ է: Ընտրեք որևէ $\vec{x}$ վեկտոր այնպես, որ նրա ծայրակետերը լինեն ուղղանկյունանիստի գագաթներ, և հետևյալ վեկտորները լինեն տարահարթ. **ա)** $\overrightarrow{B_1B}$, $\vec{x}$, $\overrightarrow{BC}$, **բ)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\vec{x}$, **գ)** $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\vec{x}$:

164. $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները տարահարթ են: Հայտնի է, որ $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{a}+\vec{c}$: Տարահա՞րթ են արդյոք հետևյալ վեկտորները. **ա)** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, **բ)** $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, **գ)** $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{f}$, **դ)** $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$:

165. Խորանարդի մի գագաթից ելնող երեք կողերը, դիտելով որպես նույն սկզբնակետով ուղղորդված հատվածներ, նշանակեք $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$: Ընդունելով, որ $|\vec{m}|=1$ սմ, գտեք $\vec{d}=\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$ և $\vec{f}=\vec{m}-\vec{n}+\vec{k}$ վեկտորների մոդուլները:

166. M կետը $ABCA_1B_1C_1$ պրիզմայի B_1C_1 կողի միջնակետն է: $\overrightarrow{AM}$ վեկտորն արտահայտեք $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ վեկտորներով (նկ. 72):



Նկ. 72

Լուծում. Ըստ երեք կետերի կանոնի՝ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1M}$: Բայց $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\vec{c}$ և $\overrightarrow{B_1M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: Նկատի ունենանք, որ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$: Այսպիսով՝

$$\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}:$$

Պատասխան՝ $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$:

167. S գագաթով բուրգի հիմքը $ABCD$ զուգահեռագիծ է, որի անկյունագծերը հատվում են O կետում: $\overrightarrow{SO}$ վեկտորն արտահայտեք $\overrightarrow{AS}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ և $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ վեկտորներով:

168. O կենտրոնով շրջանագիծը A, B, C կետերով բաժանված է երեք հավասար մասերի: Տարածության կամայական M կետը հատվածներով միացված է A, B, C կետերին: Ցույց տվեք, որ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ ուժերի համազորը հավասար է $3\overrightarrow{MO}$, այսինքն՝ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}$:

169. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$ ուղղորդված անկյունագծերը վերածեք ըստ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ և $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ վեկտորների:

170. M կետը $DABC$ քառանիստի AB կողի միջնակետն է: $\vec{DM}$ վեկտորը վերածեք ըստ $\vec{CA}=\vec{a}$, $\vec{CB}=\vec{b}$ և $\vec{CD}=\vec{c}$ վեկտորների:

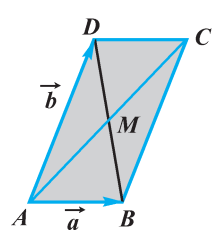
171. $\vec{d}$ վեկտորը վերածված է ըստ տրված $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ տարահարք վեկտորների. $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$: Կարո՞ղ ենք եզրակացնել, որ՝ **ա)** եթե $x=0$, ապա $\vec{d}$ վեկտորն ընկած է $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներն ընդգրկող հարթության մեջ, **բ)** եթե $x=y=0$, ապա $\vec{d}$ վեկտորն ընկած է $\vec{c}$ վեկտորն ընդգրկող ուղղի վրա, **գ)** եթե $z=0$, ապա $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{d}$ վեկտորները համահարք են, **դ)** եթե $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ վեկտորները տարահարք են, ապա $y\neq 0$:

172. $\vec{c}$ վեկտորը վերածված է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորների. $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$: Ապացուցեք, որ $\vec{c}$-ն զրոյական է այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=y=0$:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ եթե $x=y=0$, ապա $\vec{c}$-ն զրոյական վեկտոր է. $\vec{c}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$: Ապացուցենք հակադարձ պնդումը: Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տարագիծ են և $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$: Ցույց տանք, որ $x=y=0$: Նախ՝ պարզ է, որ և՛ $\vec{a}$, և՛ $\vec{b}$ վեկտորները զրոյական չեն, այլապես դրանք տարագիծ չէին լինի: Ենթադրենք, թե x և y թվերից գոնե մեկը զրո չէ, ասենք՝ $x\neq 0$: Այդ դեպքում $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ պայմանից կստացվի $\vec{a}=-\frac{y}{x}\vec{b}$: Իսկ դրանից կհետևի, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ինչը կհակասի պայմանին: Ուրեմն՝ ճշմարիտ չէ այն ենթադրությունը, թե x և y թվերից գոնե մեկը 0 չէ: Հետևաբար՝ $x=0$ և $y=0$:

173. $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները տարահարք են: Ապացուցեք, որ ըստ այդ վեկտորների վերածված $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ վեկտորը զրոյական է այն և միայն այն դեպքում, երբ $x=y=z=0$:

174. Վեկտորների կիրառմամբ ապացուցեք, որ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատման կետում կիսվում են:



Նկ. 73

Լուծում. Դիցուք՝ $ABCD$-ն զուգահեռագիծ է, M-ը AC և BD անկյունագծերի հատման կետն է: Ցույց տանք, որ M-ը դրանց միջնակետն է:

Նշանակենք $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$, ընդ որում՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տարագիծ վեկտորներ են (նկ. 73): Կարող ենք գրել՝ $\vec{AM}=x\vec{AC}=x(\vec{a}+\vec{b})$ և $\vec{MB}=y\vec{DB}=y(\vec{a}-\vec{b})$, որտեղ x-ը և y-ը որևէ թվեր են: Մյուս կողմից՝ $\vec{AM}+\vec{MB}=\vec{AB}$: Տեղադրելով՝ ստացվում է $x(\vec{a}+\vec{b})+y(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$, որից $(x+y-1)\vec{a}+(x-y)\vec{b}=\vec{0}$: Քանի որ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տա-

ռագիծ վեկտորներ են, ուրեմն՝ $x+y-1=0$ և $x-y=0$ (տե՛ս խնդիր 172-ը): Համատեղ լուծելով ստացված հավասարումները՝ ստացվում է $x=y=\frac{1}{2}$:
Հետևաբար՝ $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{MB}=\frac{1}{2}\vec{DB}$:
Քանի որ $\vec{AM}$ և $\vec{AC}$, նմանապես $\vec{MB}$ և $\vec{DB}$ վեկտորները համուղղված են, ուրեմն՝ $AM=\frac{1}{2}AC$ և $MB=\frac{1}{2}DB$, իսկ դրանից հետևում է, որ M կետը AC և BD հատվածների միջնակետն է:

175 Տրված է հարթության մեջ ընկած կամայական քառանկյուն: Վեկտորների կիրառմամբ ապացուցեք, որ նրա հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները հատման կետում կիսվում են:

176-178 խնդիրները լուծելիս օգտվեք ֆիզիկայից հայտնի հետևյալ գիտելիքից. որևէ O կետում տեղադրված q կետային լիցքի ստեղծած էլեկտրական դաշտի $\vec{E}$ լարվածությունը r հեռավորության վրա գտնվող M կետում որոշվում է $\vec{E}=\frac{kq}{r^3}\vec{r}$ բանաձևով, որտեղ $\vec{r}=\vec{OM}$, իսկ k-ն հաստատուն գործակից է:

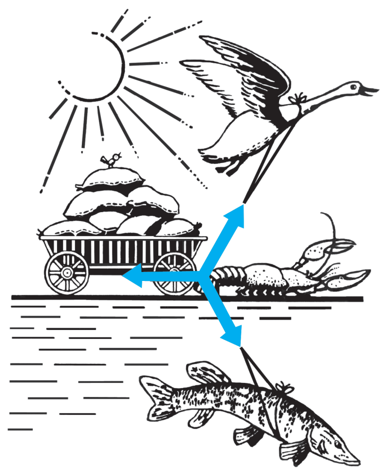
176. 4 սմ կող ունեցող խորանարդի գագաթներից մեկում տեղադրված է q կետային լիցք: Գտեք նրա ստեղծած էլեկտրական դաշտի լարվածության մոդուլը՝ **ա)** տվյալ գագաթին հարակից նիստի կենտրոնում, **բ)** տվյալ գագաթի հանդիպակաց նիստի կենտրոնում, **գ)** խորանարդի կենտրոնում:

177. 6 սմ կող ունեցող $DABC$ կանոնական քառանիստի A գագաթում տեղադրված է q կետային լիցք: Գտեք նրա ստեղծած էլեկտրական դաշտի լարվածության մոդուլը՝ **ա)** D կետում, **բ)** DC կողի միջնակետում, **գ)** ABD նիստի միջնագծերի հատման կետում, **դ)** BCD նիստի միջնագծերի հատման կետում:

178*. a կող ունեցող $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի A և B գագաթներից յուրաքանչյուրում տեղադրված է q կետային լիցք: Գտեք այդ լիցքերի ստեղծած արդյունարար էլեկտրական դաշտի լարվածության մոդուլը՝ **ա)** AB կողի միջնակետում, **բ)** CD կողի միջնակետում, **գ)** C_1D_1 կողի միջնակետում, **դ)** խորանարդի կենտրոնում:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. Հավանաբար, դուք հիշում եք կարապի, խեցգետնի և գայլաձկան հետ կապված առակը: Նկար 74-ում պատկերված են կարապի, խեցգետնի և գայլաձկան կողմից սայլակի վրա գործադրած ուժերը: Ըստ ձեզ, արդյոք ճի՞շտ են պատկերված այդ ուժերի ուղղությունները, այսինքն՝ ուժերի պատկերված ուղղությունների դեպքում իրո՞ք սայլակը տեղից չի շարժվի: Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն այդ երեք ուժերը, որպեսզի նկարը ճշգրտորեն համապատասխանի առակի ասելիքին:



Նկ. 74

   Իսկ ո՞րն է առակով արտահայտված հիմնական գաղափարը: Փորձեք մտքեր արտահայտել նաև այն հարցի շուրջ, թե ինչո՞ւ հեղինակն այդ գաղափարի պատկերավոր արտահայտման համար ընտրել է ուղղություն ունեցող (այսինքն՝ վեկտորական) մեծությունների առնչվող իրադրություն:
2. Գրեք 4-5 նախադասությունից կազմված մի տեքստ՝ օգտագործելով հետևյալ բանալի-բառերը*.
   մարմին, շարժում, հավասարակշռություն, ուղղություն, մեծություն, ուժ, համազոր:

* Նման առաջադրանքներ կատարելիս պետք է նկատի ունենալ, որ տվյալ բառերը տեքստի մեջ կարող են գործածվել նշվածից տարբեր հերթականությամբ, և պարտադիր չէ, որ ամեն մի բառն օգտագործվի միայն մեկ անգամ: Շարադրանքում յուրաքանչյուր նախադասության մեջ կարող է օգտագործվել նշված այս կամ այն բառը (կամ բառերը): Սակայն տեքստն ամբողջական ու կապակցված դարձնելու համար կարող են ձևակերպվել նաև այնպիսի նախադասություններ, որոնցում նշված այդ բառերից ոչ մեկը չօգտագործվի: Բանալի-բառերը պարզապես «հուշում են», թե կարևորն ի՞նչն է լինելու այդ տեքստի բովանդակության համար:

Լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ
Գլուխ II-ի վերաբերյալ

179. Հայտնի է, որ $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ և $\vec{b}\neq\vec{0}$: λ թվի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կլինեն՝ **ա)** համագիծ, **բ)** համուղղված, **գ)** հակուղղված, **դ)** հավասար, **ե)** հակադիր:

180. A և A_1, ինչպես նաև B և B_1 կետերը համաչափ են O կետի նկատմամբ: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ՝ **ա)** $\vec{AB}$ և $\vec{A_1B_1}$ վեկտորները համագիծ են, **բ)** $\vec{AB_1}$ և $\vec{A_1B}$ վեկտորները հավասար են, **գ)** $\vec{OA}+\vec{OB}$ վեկտորը $\vec{OA_1}+\vec{OB_1}$ վեկտորին հակադիր է, **դ)** $|\vec{AB}+\vec{AB_1}|=|\vec{AB}-\vec{A_1B}|$:

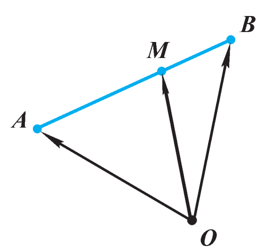
181. Տրված է, որ $\vec{a}+2\vec{b}$ և $\vec{a}+3\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են: Ցույց տվեք, որ տարագիծ են նաև $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները:

182. M կետը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի C_1D_1 կողի միջնակետն է: $\vec{AM}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a}=\vec{AB},\ \vec{b}=\vec{AD},\ \vec{c}=\vec{AA_1}$ վեկտորներով և գտեք նրա մոդուլը, եթե խորանարդի կողը՝ **ա)** 4 սմ է, **բ)** m է:

183. M-ը և N-ը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի A_1B_1 և CC_1 կողերի միջնակետերն են: $\vec{MN}$ վեկտորն արտահայտեք $\vec{a}=\vec{A_1M},\ \vec{b}=\vec{CN}$ և $\vec{c}=\vec{BC}$ վեկտորներով:

184. Տրված է, որ $\vec{AC}=x\vec{AB}+y\vec{AD}$: Կարո՞ղ են արդյոք AC և BD ուղիղները լինել խաչվող (պատասխանը հիմնավորել):

185. Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$: Գտեք՝ **ա)** $|\vec{a}+\vec{b}|$-ն, **բ)** $|\vec{a}-\vec{b}|$-ն, **գ)** $\vec{a}$ և $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:



Նկ. 75

186. Տրված է a կող ունեցող $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը: Գտեք $\vec{d}=\vec{BA}+\vec{BB_1}+\vec{BC}$ վեկտորի մոդուլը: Գտեք նաև՝ **ա)** $\vec{d}$ և $\vec{BA}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, **բ)** $\vec{d}$ և $\vec{BC}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, **գ)** $\vec{BA_1}$ և $\vec{C_1B}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

187. Ապացուցեք, որ եթե AB հատվածը M կետով տրոհվում է $AM:MB=k$ հարաբերությամբ հատվածների (նկ. 75), ապա տարածության ցանկացած O կետի համար տեղի ունի $\vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+k\cdot\vec{OB}}{1+k}$ հավասարությունը:

Լուծում. Ըստ պայմանի՝ $AM=k\cdot MB$, և քանի որ $\vec{AM}$ ու $\vec{MB}$ վեկտորները համուղղված են, կարող ենք գրել $\vec{AM}=k\cdot\vec{MB}$: Մյուս կողմից՝ $\vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}$, $\vec{MB}=\vec{OB}-\vec{OM}$: Ուրեմն, տեղադրելով՝ ստացվում է $\vec{OM}-\vec{OA}=k(\vec{OB}-\vec{OM})$, կամ $(1+k)\vec{OM}=\vec{OA}+k\cdot\vec{OB}$: Այժմ, բաժանելով $1+k$-ի վրա, ստացվում է պահանջվող հավասարությունը՝ $\vec{OM}=\dfrac{\vec{OA}+k\cdot\vec{OB}}{1+k}$:

Պարզաբանում. 6 ·4 կետում դիտարկված խնդիր 1-ը այս խնդրի մասնավոր դեպքն է (k=1 դեպքում M կետը AB հատվածի միջնակետն է):

188. Երեք փոխուղղահայաց ուղիղներ հատվում են O կետում: Որևէ M կետից տարված են այդ ուղիղներին ուղղահայացներ՝ MM_1-ը, MM_2-ը, MM_3-ը: Ցույց տվեք, որ $\vec{MM_1}+\vec{MM_2}+\vec{MM_3}=2\vec{MO}$:

189*. M-ը $SABC$ բուրգի ABC նիստի միջնագծերի հատման կետն է: Ցույց տվեք, որ $\vec{SM}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{SA}+\vec{SB}+\vec{SC}\right)$:

190. A և A_1, ինչպես նաև B և B_1 կետերը համաչափ են a ուղղի նկատմամբ: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ՝ **ա)** $\vec{AA_1}$ և $\vec{BB_1}$ վեկտորները տարագիծ են, **բ)** $\vec{AB}$, $\vec{AA_1}$ և $\vec{BB_1}$ վեկտորները համահարթ են, **գ)** $\vec{AB}$, $\vec{B_1B}$ և $\vec{AB_1}$ վեկտորները համահարթ են, **դ)** $\vec{AB}$ վեկտորը հնարավոր է վերածել ըստ $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ և $\vec{AB_1}$ վեկտորների:

191. Տրված է, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ոչ զրոյական վեկտորները համահարթ են, իսկ $\vec{d}$-ն կամայական վեկտոր է: Կարո՞ղ ենք արդյոք պնդել, որ՝

ա) գոյություն ունեն այնպիսի x, y, z թվեր, որ տեղի ունենա $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ հավասարություն,

բ) $\vec{a}$ և $\vec{b}+\vec{d}$ վեկտորները համագիծ լինել չեն կարող,

գ) եթե $\vec{a}=m\vec{b}$ և $\vec{a}=n\vec{c}$, որտեղ m-ը և n-ը որևէ թվեր են, ապա $\vec{b}$, $\vec{c}$ և $\vec{d}$ վեկտորները համահարթ են:

192. Տրված է, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները տարահարթ են, իսկ $\vec{d}$-ն կամայական վեկտոր է: Որոշեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը. **ա)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են, **բ)** գոյություն չունեն այնպիսի x և y թվեր, որ տեղի ունենա $\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$ հավասարություն, **գ)** եթե $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, որտեղ x-ը, y-ը, z-ը որևէ թվեր են, ապա $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{d}$ վեկտորները ևս տարահարթ են, **դ)** եթե $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ վերածման մեջ y և z գործակիցները 0 են, ապա $\vec{a}$ և $\vec{d}$ վեկտորները համագիծ են:

193. Տրված $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, $\vec{m}_3$ և $\vec{m}_4$ չորս վեկտորները վերածված են ըստ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ տարահարթ վեկտորների. $\vec{m}_1=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$, $\vec{m}_2=-\vec{a}+6\vec{b}$, $\vec{m}_3=-2\vec{a}-4\vec{b}+6\vec{c}$, $\vec{m}_4=\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}$: Տրված այդ չորս վեկտորներից ընտրեք՝ **ա)** երկու համագիծ վեկտորներ, **բ)** երեք համահարթ վեկտորներ:

194. Տրված է, որ $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$: $\vec{m}$, $\vec{n}$ և $\vec{p}$ վեկտորներով արտահայտեք՝ **ա)** $\vec{a}$ վեկտորը, **բ)** $\vec{b}$ վեկտորը, **գ)** $\vec{c}$ վեկտորը:

Լուծում. **ա)** Նախ «արտաքսենք» $\vec{b}$ վեկտորը: Դրա համար $\vec{n}$ վեկտորը բազմապատկենք 2-ով և գումարենք $\vec{m}$ վեկտորին. ստանում ենք $\vec{m}+2\vec{n}=3\vec{a}+5\vec{c}$ (1): Միաժամանակ գումարենք $\vec{n}$ և $\vec{p}$ վեկտորները. $\vec{n}+\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{c}$ (2): Այժմ «արտաքսենք» $\vec{c}$ վեկտորը: Դրա համար (1) հավասարությունը բազմապատկենք 3-ով, (2) հավասարությունը՝ –5-ով, և արդյունքները գումարենք.
$3(\vec{m}+2\vec{n})-5(\vec{n}+\vec{p})=9\vec{a}-10\vec{a}$, կամ $3\vec{m}+6\vec{n}-5\vec{n}-5\vec{p}=-\vec{a}$:
Հետևաբար՝ $\vec{a}=-3\vec{m}-\vec{n}+5\vec{p}$:
բ) և **գ)** առաջադրանքները կատարեք ինքնուրույն:

195. Միավոր խորանարդի (կողը հավասար է 1 միավորի) նիստերից մեկի յուրաքանչյուր գագաթում տեղադրված է q կետային լիցք: Գտեք այդ լիցքերի ստեղծած արդյունարար էլեկտրական դաշտի լարվածության մոդուլը խորանարդի կենտրոնում:

196. Կառուցեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի հատույթն այն հարթությամբ, որում ընկած են՝ **ա)** $\overrightarrow{AD_1}$ և $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$ վեկտորները, **բ)** $\overrightarrow{AC_1}$ և $\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$ վեկտորները:

197-199խնդիրները լուծեք վեկտորների կիրառության միջոցով

197. Ապացուցեք, որ սեղանի հիմքերի միջնակետերը և սրունքների շարունակությունների հատման կետը գտնվում են մի ուղղի վրա:

198. A_1, B_1, C_1 և D_1 կետերը $ABCD$ զուգահեռագծի համապատասխանաբար CD, DA, AB և BC կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցեք, որ AA_1, CC_1, BB_1 և DD_1 ուղիղները հատվելով կազմում են զուգահեռագիծ:

199. $ABCD$ քառանիստում M-ը և N-ը համապատասխանաբար ABD և BDC նիստերի միջնագծերի հատման կետերն են: Ապացուցեք, որ MN և AC ուղիղները զուգահեռ են:

ԳԼՈՒԽ III

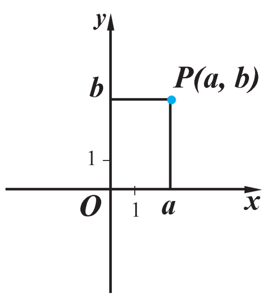
ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 7 ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ

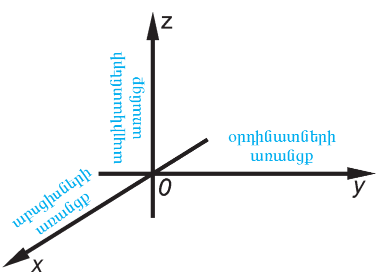
7.1. Ի՞նչ է կոորդինատների համակարգը

Կոորդինատ բառն ունի լատինական ծագում և բառացի նշանակում է *համատեղ կարգավորված* (co-համատեղ, ordinatus-կարգավորված): Առարկաների բազմության համար ներմուծել կոորդինատներ՝ նշանակում է կատարել այդ առարկաների միասնական կարգավորում: Դրա համար պետք է նշել այնպիսի տեղեկությունների համախումբ, որով կորոշվի յուրաքանչյուր առարկայի հասցեն կամ նրա գտնվելու տեղը: Այդպիսի իրադրությունների մենք հաճախ ենք հանդիպում առօրյա կյանքում: Օրինակ՝ որևէ նամակ կամ ծանրոց ուղարկելիս նշում ենք հասցեատիրոջ կոորդինատները՝ երկիրը, բնակավայրը, փողոցը, տունը: Աշխարհում հրատարակված բոլոր գրքերի բազմությունը կարգավորվում է այսպիսի կոորդինատներով՝ հեղինակը, գրքի վերնագիրը, քաղաքը, հրատարակչությունը, տպագրման տարեթիվը: Համանման է պատկերը նաև համակարգչում, որում ֆայլերի բազմությունը կարգավորվում է հասցեների (ուղիների) միջոցով. այն ներկայացվում է այսպիսի կոորդինատներով՝ սկավառակը, դարանը, թղթապանակը, ֆայլի անունը:

Կոորդինատներն առաջին կիրառությունն են գտել աշխարհագրության և աստղագիտության մեջ: Դուք գիտեք, որ կետի դիրքը երկրագնդի մակերևույթի վրա որոշելու համար օգտագործում են աշխարհագրական կոորդինատները՝ *լայնությունն ու երկայնությունը*: Նմանապես կոորդինատներով է որոշվում նաև յուրաքանչյուր երկնային մարմնի դիրքը երկնոլորտում: Մաթեմատիկայում նույնպես մեծ կարևորություն ունի հարթության վրա և տարածության մեջ կետի դիրքը որոշելու խնդիրը: Այդ խնդրի կապակցությամբ մաթեմատիկոսների կողմից կոորդինատների նախնական կիրառություններ հանդիպում են 14-րդ դարից սկսած: Սակայն կոորդինատների համակարգված կիրառության անբողջական նշանակությունը մաթեմատիկայում բացահայտվել է ֆրանսիացի ականավոր փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Ռ. Դեկարտի (1596-1650 թթ.) հետազոտությունների շնորհիվ: Ռ. Դեկարտի մեծ ծառայություններից մեկը մաթեմատիկայում այն է, որ ցույց է տվել, որ կետերի կոորդինատները թվերով արտահայտելու միջոցով հնարավոր է լինում երկրաչափական պատկերներին վերաբերող խնդիրները փոխադրել հանրահաշվական բանաձևերի և լուծել հանրահաշվական գործողությունների օգնությամբ: Այստեղ մենք կանդրադառնանք այդ խնդրին առնչվող մի քանի կարևոր հարցերի: Ընդ որում՝ նշենք, որ ժամանակակից մաթեմատիկայում օգտագործվում են կոորդինատների տարբեր համակարգեր, սակայն մենք կուսումնասիրենք դրանցից մեկը՝ *կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգը*:



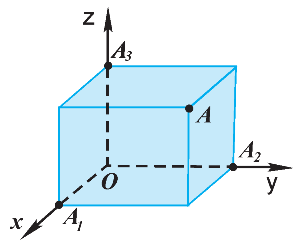
Նկ. 76



Նկ. 77

Այն, թե հարթության վրա կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ ինչպես է ներմուծվում, մենք արդեն գիտենք միջին դպրոցի հանրահաշվի և երկրաչափության դասընթացներից: Հիշենք, որ դրա համար հարկավոր է տանել երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ, դրանց յուրաքանչյուրի համար նշել ուղղություն և ընտրել հատվածների չափման միավոր (նկ. 76): Այդ դեպքում հարթության յուրաքանչյուր կետ որոշվում է երկու կոորդինատով՝ *աբսցիսով* և *օրդինատով*: Համանման ձևով է ներմուծվում նաև կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգը տարածության մեջ: Դրա համար արդեն պետք է նույն կետից տանել երեք՝ զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ուղիղներ, դրանց յուրաքանչյուրի համար նշել ուղղություն և ընտրել հատվածների չափման միավոր (նկ. 77): Փոխուղղահայաց ուղիղների ընդհանուր կետը կոչվում է *կոորդինատների սկզբնակետ*. սովորաբար այն նշանակվում է O տառով: Այդ երեք ուղիղներից յուրաքանչյուրը՝ վերցրած իր վրա նշված ուղղության հետ, կոչվում է *կոորդինատային առանցք*: Դրանք նշանակվում են այսպես՝ Ox, Oy, Oz, և ունեն իրենց անվանումները՝ *աբսցիսների առանցք, օրդինատների առանցք, ապլիկատների առանցք* (երբեմն անվանում են նաև x-երի, y-ների և z-երի առանցքներ): Այդ առանցքներից յուրաքանչյուրը O սկզբնակետով տրոհվում է երկու ճառագայթի: Ճառագայթներից մեկը, որի ուղղությունը համընկնում է տվյալ առանցքի ուղղությանը, կոչվում է *դրական կիսառանցք*, իսկ մյուսը՝ *բացասական կիսառանցք*: Կոորդինատային առանցքների զույգերով անցնող հարթությունները կոչվում են *կոորդինատային հարթություններ* և նշանակվում են համապատասխանաբար Oxy, Oyz, Ozx: Կոորդինատների համակարգն ամբողջությամբ նշանակվում է $Oxyz$:

Պարզենք, թե ի՞նչ են կետի կոորդինատները տարածության մեջ: Դիցուք՝ տարածության մեջ ներմուծված է $Oxyz$ կոորդինատների համակարգը, և A-ն կամայական կետ է: A կետով տանենք կոորդինատային առանցքներին ուղղահայաց հարթություններ, և այդ հարթությունների ու առանցքների հատման կետերը նշանակենք համապատասխանաբար A_1, A_2, A_3 (նկ. 78): Որպես A կետի առաջին կոորդինատ կվերցնենք A_1 կետի կոորդինատը Ox առանցքի վրա. այն կանվանենք A կետի *աբսցիս* և կնշանակենք x (հիշենք, որ կոորդինատային առանցքի վրա գտնվող կետի կոորդինատ որոշելը մեզ ծանոթ է դեռևս միջին դպրոցից, և այն կատարվում է այսպես. եթե A_1-ը դրական կիսաառանցքի կետ է, ապա $x=OA_1$, եթե բացասական կիսաառանցքի կետ, ապա $x=-OA_1$, իսկ եթե համընկնում է O կետին, ապա $x=0$): Համանման ձևով որպես A կետի երկրորդ և երրորդ կոորդինատներ կվերցնենք համապատասխանաբար A_2 կետի կոորդինատը Oy առանցքի վրա և A_3 կետի կոորդինատը Oz առանցքի վրա: Դրանք համապատասխանաբար կնշանակենք y և z, անվանելով A կետի *օրդինատ* և *ապլիկատ*:

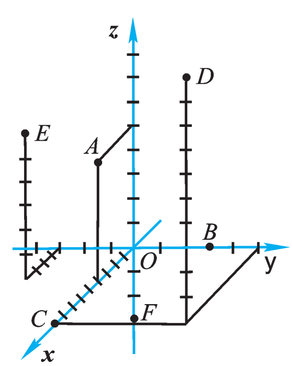


Նկ. 78

Այսպիսով, A կետին համադրվում է x, y և z թվերի եռյակը. այդ թվերը կոչվում են A կետի կոորդինատներ և գրառվում են այսպես՝ $A(x, y, z)$: Ավելորդ չէ ընդգծել, որ գրառման մեջ կարևոր է պահպանել կոորդինատների հաջորդականությունը. սկզբում՝ աբսցիսը, հետո՝ օրդինատը, վերջում՝ ապլիկատը: Նկար 79-ում պատկերված են մի քանի կետեր՝ հետևյալ կոորդինատներով. $A(4, 0, 5)$, $B(0, 3, 0)$, $C(9, 0, 0)$, $D(9, 5, 10)$, $E(4, -3, 6)$, $F(0, 0, -3)$:

Պարզաբանում

Նկատենք, որ եթե կետն ընկած է կոորդինատային առանցքի վրա կամ կոորդինատային հարթության մեջ, ապա նրա որոշ կոորդինատներ զրո են: Օրինակ, նկար 79-ում A կետն ընկած է Oxz հարթության մեջ, և նրա օրդինատը զրո է՝ $y=0$, B կետն ընկած է Oy առանցքի վրա, և նրա աբսցիսն ու ապլիկատը զրո են՝ $x=0$ և $z=0$: Նմանապես զրո են C կետի օրդինատն ու ապլիկատը, F կետի աբսցիսն ու օրդինատը. C-ն ընկած է Ox առանցքի, իսկ F-ը՝ Oz առանցքի վրա: Կոորդինատների սկզբնակետի բոլոր կոորդինատները զրո են՝ $O(0, 0, 0)$:

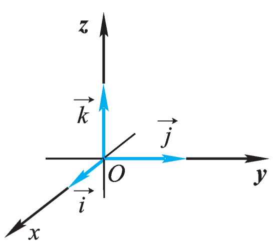


Նկ. 79

7.2. Վեկտորի կոորդինատները

Պարզենք, թե տարածության մեջ վեկտորն ինչպե՞ս է տրվում կոորդինատներով: Դիցուք՝ տարածության մեջ ներմուծված է $Oxyz$ կոորդինատների համակարգը, իսկ $\vec{a}$-ն կամայական վեկտոր է: $\vec{a}$ վեկտորը տեղադրենք այնպես, որ նրա սկզբնակետը համընկնի կոորդինատների O սկզբնակետի հետ: *Կոորդինատների սկզբնակետից տեղադրված վեկտորի վերջնակետի կոորդինատները կոչվում են այդ վեկտորի կոորդինատներ:* Այսպիսով, տարածության մեջ ներմուծված կոորդինատների համակարգում եթե A կետի կոորդինատներն արտահայտվում են x, y, z թվերի եռյակով, ապա այդ նույն թվերի եռյակով են արտահայտվում նաև $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ վեկտորի կոորդինատները: Վեկտորի կոորդինատները գրառվում են ձևավոր փակագծերի մեջ, օրինակ՝ $\overrightarrow{OA}\{x, y, z\}$ կամ $\vec{a}\ \{x, y, z\}$:

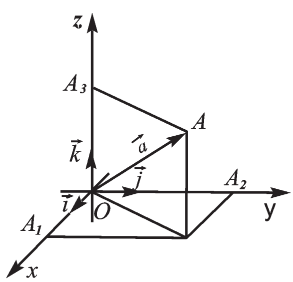
Ներմուծենք նաև *կոորդինատային վեկտորներ* հասկացությունը. որն անհրաժեշտ է, մասնավորապես, վեկտորի մոդուլը, ինչպես նաև վեկտորների հետ կատարվող գործողությունները կոորդինատներով արտահայտելու համար:



Նկ. 80

Վեկտորը, որի մոդուլը հավասար է հատվածների չափման միավորին*, կոչվում է *միավոր վեկտոր:*

Կոորդինատային վեկտորներն այն միավոր վեկտորներն են, որոնք տեղադրված են կոորդինատների սկզբնակետից՝ կոորդինատային առանցքների ուղղությամբ (նկ. 80): Աբսցիսների առանցքի միավոր վեկտորը նշանակենք $\vec{i}$, օրդինատների առանցքի միավոր վեկտորը՝ $\vec{j}$, իսկ ապլիկատների առանցքի միավոր վեկտորը՝ $\vec{k}$: Դժվար չէ նկատել, որ կոորդինատային վեկտորները ունեն հետևյալ կոորդինատները՝ $\vec{i}\{1,\ 0,\ 0\}$, $\vec{j}\{0,\ 1,\ 0\}$, $\vec{k}\{0{,}0{,}1\}$:



$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$,

$\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OA_2}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OA_3}=z\vec{k}$:

Նկ. 81

Կոորդինատային $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ վեկտորները տարահարթ են: Հետևաբար՝ ցանկացած $\vec{a}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ այդ վեկտորների, այսինքն՝ ներկայացնել $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ հավասարության տեսքով, որտեղ վերածման x, y, z գործակիցները որոշվում են միարժեքորեն: Օգտվելով նկար 81-ից՝ դժվար չէ համոզվել, որ x, y, z թվերը ներկայացնում են այնպիսի A կետի կոորդինատներ, որը $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ վեկտորի վերջնակետն է: Այսինքն՝

Նշենք, որ կոորդինատների համակարգում դիտարկվող յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը, հետևաբար նաև վեկտորի մոդուլը արտահայտվում է հատվածների չափման հենց այն միավորով, որը որպես միավոր է ընտրված տվյալ համակարգի կոորդինատային առանցքների համար: Այդ առումով հատվածի երկարությունը և վեկտորի մոդուլը ներկայացվում են միայն երկարությունն արտահայտող թվով (առանց չափման միավորը նշելու):

$\vec{a}$ վեկտորի՝ ըստ կոորդինատային վեկտորների վերածման x, y, z գործակիցները նույն $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են՝ $\vec{a}\{x, y, z\}$: Ընդ որում՝ քանի որ վերածման գործակիցները որոշվում են միարժեքորեն, ուրեմն՝ *հավասար վեկտորները կունենան նույն կոորդինատները:*

Դիտարկենք օրինակ: Դիցուք՝ $\vec{c}$ վեկտորի վերածումն ըստ կոորդինատային վեկտորների ունի $\vec{c}=4\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ տեսքը: Այդ դեպքում $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ վեկտորի C վերջնակետն ունենում է $C(4,-3,6)$ կոորդինատները և, ուրեմն, $\vec{c}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{4,-3,6\{$:

Պարզաբանում

Նկատենք, որ եթե վեկտորի կոորդինատներից մեկը զրո է, ապա այն համահարթ է մյուս երկու կոորդինատներին համանուն կոորդինատային վեկտորների հետ (օրինակ՝ $\vec{b}\{0, 2, -3\}$ վեկտորը համահարթ է $\vec{j}$ և $\vec{k}$ վեկտորների հետ, այսինքն՝ $\vec{b}$-ն ընկած է Oyz հարթության մեջ): Եթե վեկտորի կոորդինատներից երկուսն են զրո, ապա այն համագիծ է ոչ զրոյական կոորդինատին համանուն կոորդինատային վեկտորի հետ (օրինակ՝ $\vec{c}\{0, 0, 3\}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{k}$ վեկտորի հետ, այսինքն՝ $\vec{c}$-ն ընկած է Oz առանցքի վրա): Իսկ եթե վեկտորի բոլոր կոորդինատներն են զրո, ապա այն զրոյական վեկտոր է՝ $\vec{0}\{0, 0, 0\}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

200. Բերեք տարբեր կոորդինատների կիրառության առօրեական օրինակներ:
201. Նշեք՝ **ա)** ձեր բնակավայրի, **բ)** ՀՀ տարածքի հյուսիսային, հարավային, արևելյան և արևմտյան ծայրակետերի աշխարհագրական կոորդինատները:
202. Ի՞նչ կոորդինատներ կնշեք, որպեսզի որոշվի՝
   ա) ձեր դպրոցի գտնվելու վայրը,
   բ) ձեր օգտագործած որևէ առարկայի դասագիրքը,
   գ) որևէ անձի պատկանող ավտոմեքենան:
203. Տրված են $A(1,0,3)$, $B(0,1,-2)$, $C(3,0,0)$, $D(2,0,3)$, $E(1,3,2)$, $F(0,0,2)$, $G(-1,2,0)$, $H(0,-1,0)$, $M\left(\sqrt{2},0,-1\right)$ և $N\left(7,\sqrt{3},-4\right)$ կետերը: Այդ կետերից որո՞նք են գտնվում՝ **ա)** աբսցիսների առանցքի վրա, **բ)** օրդինատների առանցքի վրա, **գ)** ապլիկատների առանցքի վրա, **դ)** Oxy հարթության մեջ, **ե)** Oxz հարթության մեջ, **զ)** Oyz հարթության մեջ:
204. Նկարով պատկերեք կոորդինատային ուղղանկյուն համակարգ և նշեք հետևյալ կոորդինատներով կետերը՝ $A(0, 0, 2)$, $B(1, 2, 0)$, $C(-2, 0, 2)$, $D(2, -3, -1)$:
205. Միավոր կող ունեցող խորանարդի մի գագաթը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ այդ գագաթից ելնող կողերն ընկած են

կոորդինատային դրական կիսառանցքների վրա: Նկարով պատկերեք կոորդինատային առանցքներն ու խորանարդը և որոշեք խորանարդի գագաթների կոորդինատները:

206. Տրված են $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի չորս գագաթների կոորդինատները՝ $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$: Գտեք նրա մյուս գագաթների կոորդինատները:

207. A_1-ը, A_2-ը և A_3-ը տրված $A(1, 2, 3)$ կետի պրոյեկցիաներն են համապատասխանաբար Oxy, Oxz և Oyz հարթությունների վրա: Գտեք A_1, A_2 և A_3 կետերի կոորդինատները:

208. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված է $B(3, 2, 1)$ կետը: Փորձեք կռահել և որոշել այն B_1 կետի կոորդինատները, որը B կետին համաչափ է՝ **ա)** Oxy հարթության նկատմամբ, **բ)** Ox առանցքի նկատմամբ, **գ)** O կետի նկատմամբ:

209. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված են $A(-3, 2, 1)$, $B(1, 3, 1)$, $C(0,-6,2)$, $D(-1,0,0)$ կետերը: Գրեք $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ վեկտորների կոորդինատները:

210. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված են $A(2, 0, 0)$ և $B(-3, 0, 0)$ կետերը: Համագի՞ծ, թե՞ տարագիծ են $\vec{OA}$ և $\vec{OB}$ վեկտորները (պատասխանը հիմնավորել):

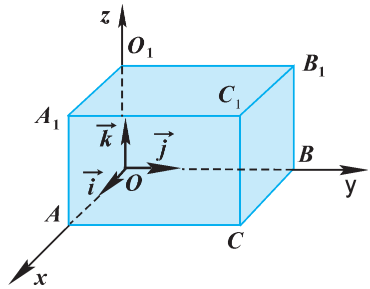
211. $\vec{a}$ վեկտորը վերածված է ըստ կոորդինատային $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորների՝ $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{k}$: Գրեք $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատները: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն Oxz հարթությունը և OA ուղիղը, եթե հայտնի է, որ $\vec{OA} = \vec{a}$:

212. Տրված են $\vec{a}\{0, 1, 2\}$, $\vec{b}\{-1, -1, 0\}$, $\vec{c}\{1, -1, 2\}$ վեկտորները: Գրեք այդ վեկտորներից յուրաքանչյուրի վերածումն ըստ կոորդինատային $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորների:

213. Փորձեք կռահել, թե ի՞նչ կոորդինատներ կունենան կոորդինատային $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորների հակադիր $-\vec{i}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$ վեկտորները:

214. Նկարով պատկերեք կոորդինատային $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորներն ու տրված $\vec{a}\{2, 1, 0\}$ և $\vec{b}\{1, 0, 3\}$ վեկտորները: Որոշեք, թե համահա՞րթ են արդյոք՝ **ա)** $\vec{a}$, $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորները, **բ)** $\vec{b}$, $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորները, **գ)** $\vec{a}$, $\vec{j}$ և $\vec{k}$ վեկտորները, **դ)** $\vec{b}$, $\vec{i}$ և $\vec{k}$ վեկտորները:

215. Նկար 82-ում պատկերված է ուղղանկյունանիստ, որի չորս գագաթների կոորդինատները տրված են՝ $O(0, 0, 0)$, $O_1(0, 0, 2)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$: Որոշեք $\vec{OA_1}$, $\vec{OC}$, $\vec{OB_1}$ և $\vec{OC_1}$ վեկտորների կոորդինատները:



Նկ. 82

216. Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ պնդումը.

ա) հավասար վեկտորներն ունեն միևնույն կոորդինատները,

բ) եթե վեկտորը ոչ զրոյական է, ապա նրա բոլոր կոորդինատները զրո լինել չեն կարող,

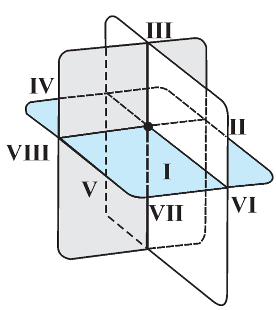
գ) եթե վեկտորի որևէ կոորդինատ զրո է, ապա կոորդինատային վեկտորներից մեկն այդ վեկտորի հետ տարագիծ է,

դ) եթե ոչ զրոյական վեկտորի կոորդինատներից մեկը զրո է, ապա կոորդինատային վեկտորներից առնվազն մեկն այդ վեկտորի հետ տարագիծ է,

ե) եթե վեկտորի կոորդինատներից երկուսը զրո չեն, ապա կոորդինատային վեկտորներից առնվազն երկուսն այդ վեկտորի հետ համագիծ չեն:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Դուք գիտեք, որ հարթության վրա կոորդինատային առանցքներ տանելով՝ հարթությունը տրոհվում է չորս մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է քառորդ: Նմանապես տարածության մեջ կոորդինատային հարթություններ տանելով՝ տարածությունը տրոհվում է ութ մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է *ութորդ*: Նկար 83-ում ութորդները համարակալված են: Որոշեք ութորդներից յուրաքանչյուրում $M(x, y, z)$ կետի կոորդինատների նշանները և լրացրեք ներկայացված աղյուսակը.**



Նկ. 83

Կոորդինատը	Ութորդը, կոորդինատի նշանը							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Աբսցիսը՝ x-ը	+						–	
Օրդինատը՝ y-ը	+						–	
Ապլիկատը՝ z-ը	+						–	

2. **Օգտվելով քարտեզից՝ որոշեք հետևյալ քաղաքների աշխարհագրական կոորդինատները.**

Գյումրի, Երևան, Կարին, Վան, Շուշի, Ախալցխա, Նախիջևան, Իջևան:

Որևէ սկզբունքով վերադասավորեք այդ քաղաքների անունները և մեկնաբանեք ձեր ընտրած սկզբունքը:

§ 8 ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՀԵՏ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐՈՎ

8.1. Վեկտորների գումարի, տարբերության, վեկտորի ու թվի արտադրյալի կոորդինատները

Պարզենք, թե ինչպես կատարել գումարման, հանման և թվով բազմապատկման գործողությունները այն վեկտորների հետ, որոնք տրված են կոորդինատներով:

ա) Վեկտորների գումարումը և հանումը

Դիցուք՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տրված են կոորդինատներով՝ $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$: Քանի որ $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ և $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, ապա օգտվելով վեկտորների գումարման հատկություններից՝ կստանանք.
$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$, իսկ դա նշանակում է, որ $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\}$: Համանման արդյունք կստացվի, եթե գումարենք երկուսից ավելի վեկտորներ: Այսպիսով՝

երկու կամ ավելի վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին:

Նույն կերպ, եթե դիտարկենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը, կստանանք $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k}$, ինչը նշանակում է, որ $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2\}$: Այսինքն՝

երկու վեկտորների տարբերության յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը:

Մասնավորապես, օգտվելով $-\vec{a}=\vec{0}-\vec{a}$ հավասարությունից, կարող ենք եզրակացնել, որ *տրված վեկտորի հակադիրի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է այդ վեկտորի համապատասխան կոորդինատի հակադիրին*:

Այսինքն՝ եթե $\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{x, y, z\}$ կոորդինատները, ապա $-\vec{a}$ վեկտորը կունենա $\{-x, -y, -z\}$ կոորդինատները:

բ) Վեկտորի ու թվի արտադրյալը

Դիցուք՝ տրված է $\vec{a}\{x, y, z\}$ վեկտորը, իսկ λ-ն կամայական թիվ է: Նկատի ունենալով, որ $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, և օգտվելով վեկտորի ու թվի բազմապատկման հատկություններից, կստանանք $\lambda\vec{a}=\lambda(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=\lambda x\vec{i}+\lambda y\vec{j}+\lambda z\vec{k}$, իսկ դա նշանակում է, որ $\lambda\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $\{\lambda x, \lambda y, \lambda z\}$:

Այսպիսով՝

վեկտորի ու թվի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է վեկտորի համապատասխան կոորդինատի ու այդ թվի արտադրյալին:

Վերոհիշյալ դիտարկումները թույլ են տալիս որոշելու տրված կոորդինատներով վեկտորների հանրահաշվական գումարի կոորդինատները: Օրինակ՝ որոշենք $\vec{p}=3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե տրված են՝ $\vec{a}\{1, 0, -2\}$, $\vec{b}\{-2, 6, -4\}$, $\vec{c}\{3, -1, -3\}$:

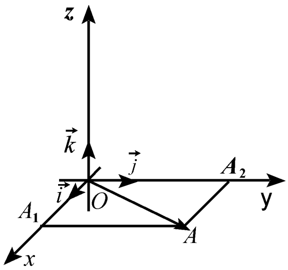
Որպես վեկտորի ու թվի արտադրյալներ՝ $3\vec{a}$ վեկտորն ունի $\{3, 0, -6\}$, իսկ $-\frac{1}{2}\vec{b}$ վեկտորը՝ $\{1, -3, 2\}$ կոորդինատները: $\vec{p}=3\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\vec{c}$ գումարի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ կերպ. $\{3+1+3,\ 0-3-1,\ -6+2-3\}$, այսինքն՝ $\vec{p}$ վեկտորն ունի $\{7, -4, -7\}$ կոորդինատները:

8.2. Վեկտորի մոդուլի հաշվումը կոորդինատներով

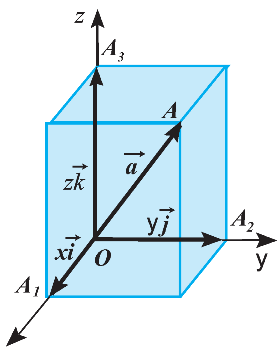
Դիցուք՝ $Oxyz$ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում տրված է $A(x, y, z)$ կամայական կետ: Վերցնենք O սկզբնակետով և A վերջնակետով $\vec{a}=\vec{OA}$ վեկտորը, որը կունենա $\{x, y, z\}$ կոորդինատները: Պարզենք, թե այդ x, y, z կոորդինատների միջոցով ինչպես հաշվել $\vec{a}$ վեկտորի մոդուլը: Խնդիրը հանգում է նրան, թե ինչպես գտնել OA հատվածի երկարությունը: Դիտարկենք մի քանի դեպքեր:

ա) Եթե A կետն ընկած է կոորդինատային առանցքներից որևէ մեկի, ասենք՝ Ox առանցքի վրա, ապա $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ վերածման մեջ y և z գործակիցները 0 են: Հետևաբար՝ $\vec{a}=x\vec{i}$ և, ուրեմն, $|\vec{a}|=|x|\cdot|\vec{i}|$: Բայց քանի որ $\vec{i}$-ն միավոր վեկտոր է, այսինքն՝ $|\vec{i}|=1$, ապա այդ դեպքում $|\vec{a}|=|x|$ կամ, որ նույնն է՝ $|\vec{a}|=\sqrt{x^2}$:

բ) Եթե A կետն ընկած չէ որևէ առանցքի վրա, բայց ընկած է կոորդինատային հարթություններից որևէ մեկի, ասենք՝ Oxy հարթության մեջ, ապա $z=0$ և, ուրեմն, $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$: Եթե A_1-ով և A_2-ով նշանակենք A կետից Ox և Oy առանցքներին իջեցված ուղղահայացների հիմքերը, ապա ստացվում է, որ $x\vec{i}=\vec{OA_1}$ և $y\vec{j}=\vec{OA_2}$ (նկ. 84): Այդ դեպքում OA հատվածը OA_1AA_2 ուղղանկյան անկյունագիծ է, և, ուրեմն, $\vec{a}=\vec{OA}=\vec{OA_1}+\vec{OA_2}$: Նկատի ունենանք, որ $OA_1=|\vec{OA_1}|=|x\vec{i}|=|x|=\sqrt{x^2}$



Նկ. 84



Նկ. 85

և $OA_2 = |\overrightarrow{OA_2}| = |y\vec{j}| = |y| = \sqrt{y^2}$: Ըստ ուղղանկյան անկյունագծի հատկության՝ $OA = \sqrt{OA_1^{\,2} + OA_2^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$: Հետևաբար՝ $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$:

գ) Եթե A կետն ընկած չէ որևէ կոորդինատային հարթության մեջ, ապա $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, որտեղ $x\vec{i} = \overrightarrow{OA}_1$, $y\vec{j} = \overrightarrow{OA}_2$, $z\vec{k} = \overrightarrow{OA}_3$ (նկ. 85: A_1-ը, A_2-ը և A_3-ը A կետից Ox, Oy և Oz առանցքներին իջեցրած ուղղահայացների հիմքերն են): Այդ դեպքում OA հատվածն այն ուղղանկյունանիստի անկյունագիծն է, որի երեք չափսերն են OA_1, OA_2 և OA_3 հատվածները: Այժմ եթե նկատի ունենանք, որ $OA_1 = \sqrt{x^2}$, $OA_2 = \sqrt{y^2}$, $OA_3 = \sqrt{z^2}$, և օգտվենք ուղղանկյունանիստի անկյունագծի հատկությունից, վերջնականապես կստանանք $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{OA_1^{\,2} + OA_2^{\,2} + OA_3^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

Ընդհանրացնենք դիտարկված դեպքերը: Դրա համար նկատենք, որ $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ բանաձևը ճշմարիտ է ինչպես ա) դեպքի (երբ y=z=0), այնպես էլ բ) դեպքի (երբ z=0) համար: Ուրեմն՝ կարող ենք եզրակացնել. *$\vec{a}$ {x, y, z} կոորդինատներով $\vec{a}$ վեկտորի մոդուլը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad : \qquad (1)$$

8.3. Վեկտորների սկալյար արտադրյալի հաշվումը կոորդինատներով

Մենք արդեն գիտենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հաշվվում է $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ բանաձևով, որտեղ φ-ն այդ երկու վեկտորների կազմած անկյունն է: Մասնավորապես, այն դեպքում, երբ բազմապատկվող վեկտորները միմյանց հավասար են ($\vec{b}=\vec{a}$), նրանց կազմած անկյունը զրո է՝ φ=0, ուրեմն՝ cosφ=1, և ստացվում է, որ $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$: Ընդունված է $\vec{a}\cdot\vec{a}$ արտադրյալն անվանել $\vec{a}$ վեկտորի *սկալյար քառակուսի* և նշանակել $\vec{a}^{\,2}$: Այժմ, եթե նկատի ունենանք նախորդ կետի (1) բանաձևը, կստանանք $\{x, y, z\}$ կոորդինատներ ունեցող $\vec{a}$ վեկտորի սկալյար քառակուսին կոորդինատների միջոցով հաշվելու բանաձևը՝ $\vec{a}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$:

Պարզվում է, որ կոորդինատների միջոցով կարող ենք հաշվել նաև կամայական երկու՝ $\vec{a}\,\{x_1, y_1, z_1\}$ և $\vec{b}\,\{x_2, y_2, z_2\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Կարելի է ապացուցել, որ այն հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (2)$$

Հետաքրքրվողները այդ բանաձևի արտածումը կարող են գտնել Ա-9 խնդրի լուծման մեջ: Մեզ մնում է նկատել, որ (1) և (2) բանաձևերը հնարավորություն են տալիս գտնելու երկու վեկտորների կազմած անկյունը: Այսպես, քանի որ $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, ուրեմն՝ $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$: Եթե օգտվենք (2) բանաձևից և $\vec{a}$ ու $\vec{b}$ վեկտորների մոդուլները արտահայտենք իրենց կոորդինատներով, ապա φ անկյունը գտնելու համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad : \qquad (3)$$

Ստացված (3) բանաձևից, մասնավորապես, հետևում է, որ $\{x_1, y_1, z_1\}$ և $\{x_2, y_2, z_2\}$ կոորդինատներով երկու ոչ զրոյական վեկտորները փոխուղղահայաց կլինեն այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0$ հավասարությունը: Որպես օրինակ կարող ենք դիտարկել կոորդինատային $\vec{i}\,\{1, 0, 0\}$, $\vec{j}\,\{0, 1, 0\}$ և $\vec{k}\,\{0, 0, 1\}$վեկտորների յուրաքանչյուր զույգի կազմած անկյունը: Դժվար չէ ստուգել, որ $|\vec{i}\,| = |\vec{j}\,| = |\vec{k}\,|=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$ և, ուրեմն՝ $\angle(\vec{i}, \vec{j}\,) = \angle(\vec{i}, \vec{k}\,) = \angle(\vec{j}, \vec{k}\,) = 90^\circ$:

Պարզաբանում

Վեկտորների սկալյար բազմապատկման կանոնները համանման են թվերի բազմապատկման կանոններին: Պարզվում է, որ *ցանկացած $\vec{a}$, b, c վեկտորնե-րի և կամայական k թվի համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները.*

ա) $\boldsymbol{\vec{a}^{\,2} \geq 0}$, ընդ որում՝ $\vec{a}^{\,2} = 0$ միայն $\vec{a} = 0$ դեպքում,

բ) $\boldsymbol{\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}}$ (տեղափոխական հատկություն),

գ) $\boldsymbol{(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}}$ (բաշխական հատկություն),

դ) $\boldsymbol{k(\vec{a}\,\vec{b}) = (k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})}$ (զուգորդական հատկություն):

Նշենք, որ ա) հատկությունն անմիջականորեն հետևում է $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}\,|^2$ բանաձևից, բ) հատկությունը՝ վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից, իսկ գ) և դ) հատկությունները կարելի է ապացուցել՝ կիրառելով սկալյար արտադրյալը կոորդինատներով հաշվելու (2) բանաձևը (տե՛ս Ա-10 խնդիրը): Այդ հատկությունների շնորհիվ վեկտորների գործողությունները կատարվում են թվերի հետ կատարվող համանուն գործողությունների՝ հանրահաշվից հայտնի կանոններին համանման կանոններով: Այդպիսի նմանությունները մեկ անգամ ևս վկայում են հանրահաշվի և երկրաչափության միջառարկայական խորքային կապերի առկայության մասին: Իսկ այդ կապերի բացահայտումը հիմնականում կատարվում է կոորդինատային համակարգի ներմուծման շնորհիվ, ինչը թույլ է տալիս երկրաչափական փաստերն արտահայտել թվերի «լեզվով»:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

217. Տրված են $\vec{a}\{2, -1, 3\}$, $\vec{b}\{0, 2, -1\}$, $\vec{c}\{-1, 1, 0\}$ վեկտորները: Գտեք $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ վեկտորների կոորդինատները:
218. Տրված են $\vec{a}\{-1, 5, 1\}$, $\vec{b}\{2, 2, -0{,}6\}$, $\vec{c}\{0, 7, -4\}$ վեկտորները: Գտեք $\vec{d}\{x, y, z\}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$:
219. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված է $A(1, 1, 1)$ կետը, և հայտնի է, որ $\vec{a}=\vec{OA}$: Գտեք $\vec{a}+\vec{i}$, $\vec{a}+\vec{j}$, $\vec{a}+\vec{i}+\vec{k}$ վեկտորների կոորդինատները:
220. Տրված են $\vec{a}\{3, -2, 4\}$, $\vec{b}\{2, -0{,}8, -4\}$, $\vec{c}\{7, 0, -1{,}4\}$ վեկտորները: Գտեք $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ վեկտորների կոորդինատները:
221. Գտեք $\vec{a}\{x, y, z\}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ՝
ա) , $\vec{a}-\vec{i}=\vec{k}$ **բ)** $\vec{a}+\vec{j}-\vec{k}=\vec{0}$, **գ)** $\vec{a}-\vec{k}=\vec{i}-\vec{j}$:
222. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված են $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերը: Գտեք $\vec{AB}$ վեկտորի կոորդինատները:
Լուծում. $\vec{OB}$ և $\vec{OA}$ վեկտորները կունենան $\vec{OB}\{x_2, y_2, z_2\}$ և $\vec{OA}\{x_1, y_1, z_1\}$ կոորդինատները: Ըստ վեկտորների գումարման կանոնի՝ $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$, ուրեմն՝ $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$: Հետևաբար՝ $\vec{AB}$ վեկտորը կունենա $\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ կոորդինատները:
223. Տրված են $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-2, 3, -1)$ կետերը: Գտեք $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, $\vec{BA}$ վեկտորների կոորդինատները:
224. Տրված են A(–1, 1, 2), B(1, 0, 1) և C(0, 2, –1) կետերը: Գտեք այնպիսի $D(x,y,z)$ կետ, որ՝ **ա)** $\vec{AB}$ և $\vec{CD}$ վեկտորները լինեն հավասար, **բ)** $\vec{AD}$ և $\vec{BC}$ վեկտորները լինեն հակադիր:
225. Տրված են $\vec{a}\left\{-\frac{1}{2}, 0, 2\right\}$, $\vec{b}\left\{4, \frac{1}{3}, -\sqrt{2}\right\}$, $\vec{c}\left\{0, -\frac{1}{4}, 0{,}5\right\}$ վեկտորները: Գտեք $4\vec{a}$, $-6\vec{b}$ և $0{,}2\vec{c}$ վեկտորների կոորդինատները:

226. Գտեք $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{i}$ և $\vec{q} = -2\vec{j} - 3\vec{a}$ վեկտորների կոորդինատները, որտեղ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$:

227. Արդյոք համագի՞ծ են $\vec{a}\{2, 3, -4\}$ և $\vec{b}\{-4, -6, 8\}$ վեկտորները:
Լուծում. Նկատենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կոորդինատները համեմատական են, և $\vec{b} = -2\vec{a}$: Հետևաբար՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ընդ որում՝ քանի որ $-2<0$, ուրեմն դրանք հակուղղված են:

228. $\vec{a}\{1, 3, 2\}$, $\vec{b}\{-2, 1, 0\}$, $\vec{c}\{-0,5, -1,5, -1\}$, $\vec{d}\{1, \sqrt{3}, -\sqrt{2}\}$, $\vec{e}\{-\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 2\}$, $\vec{f}\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0\right\}$ վեկտորներից ընտրեք համագիծ վեկտորների զույգերը և յուրաքանչյուր զույգի համար պարզեք՝ համուղղվա՞ծ են, թե՞ հակուղղված:

229. m և n թվերի ի՞նչ արժեքների դեպքում հետևյալ վեկտորները կլինեն համագիծ՝ **ա)** $\vec{a}\{2, m, 3\}$ և $\vec{b}\{n, 2, 2\}$, **բ)** $\vec{a}\{m, 5, -2\}$ և $\vec{b}\{3, -1, n\}$, **գ)** $\vec{a}\{3, -6, 9\}$ և $\vec{b}\{m, n, -3\}$:

230. Գտեք $\vec{a}\{1, 2, -2\}$, $\vec{b}\{-4, 1, -1\}$, $\vec{c}\{3, \sqrt{3}, -2\}$ վեկտորների մոդուլները:

231. Գտեք m-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $\vec{e}\{m, -m, 1\}$ վեկտորի մոդուլը հավասար կլինի 3-ի:

232. n-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $\vec{a}\{2, -3, 2n\}$ և $\vec{b}\{n, 6, -2\}$ վեկտորների մոդուլները կլինեն հավասար:

233. Հայտնի է, որ $A(-2m, -m, -2m)$ կետը կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում ընկած է 1-ին ութորդում, և $\vec{OA}$-ն միավոր վեկտոր է: Գտեք A կետի կոորդինատները:

234. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված է $A(1,1,1)$ կետը: Ox առանցքի վրա գտեք այնպիսի B կետ, որ $\vec{OA}$ և $\vec{OB}$ վեկտորների մոդուլները լինեն հավասար:

235. Հաշվեք հետևյալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ **ա)** $\vec{a}\{-3, 0, 2\}$ և $\vec{b}\{5, 8, 6\}$, **բ)** $\vec{a}\{\sqrt{6}, 1, -\sqrt{2}\}$ և $\vec{b}\{-\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, 3\}$:

236. Տրված են $\vec{a}\{2, 1, -1\}$, $\vec{b}\{1, -1, 1\}$ և $\vec{c}\{3, 0, -4\}$ վեկտորները: Հաշվեք՝ **ա)** $\vec{a}\,\vec{b}$-ն, $\vec{a}\,\vec{c}$-ն, $\vec{b}\,\vec{c}$-ն, **բ)** $\vec{a}^{\,2}$-ն, $\vec{b}^{\,2}$-ն, $\sqrt{\vec{c}^{\,2}}$-ն, **գ)** $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$-ն, $(\vec{a} - \vec{b})\vec{c}$-ն, $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$-ն:

237. Տրված են $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{j}$ վեկտորները: Հաշվեք՝ **ա)** $\vec{a}\,\vec{b}$-ն, $\vec{a}\,\vec{c}$-ն, $\vec{b}\,\vec{c}$-ն, **բ)** $\vec{a}\,\vec{i}$-ն, $\vec{b}(\vec{i} + \vec{k})$-ն, $\vec{c}(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$-ն:

238. Գտեք $\vec{a}\{-2, 2, 1\}$ և $\vec{b}\{3, 0, -4\}$ վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը:

239. Տրված են $\vec{a}\{5, -1, 0\}$, $\vec{b}\{1, 2, -1\}$ և $\vec{c}\{-3, 1, -1\}$ վեկտորները: Պարզեք՝ սո՞ւր, ուղի՞ղ, թե՞ բութ է՝ **ա)** $\vec{a}$ և $\vec{b}$, **բ)** $\vec{a}$ և $\vec{c}$, **գ)** $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

240. Պարզեք, թե ինչպիսի՞ (սո՞ւր, ուղի՞ղ, թե՞ բութ) անկյուններ է կազմում $\vec{a}\{-2, 0, 1\}$վեկտորը կոորդինատային $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ վեկտորների հետ:

241. m-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում հետևյալ վեկտորները կլինեն ուղղահայաց. **ա)** $\vec{a}\{3, -1, 2\}$ և $\vec{b}\{1, -3, m\}$, **բ)** $\vec{a}\{m, -m, 1\}$ և $\vec{b}\{m, 2, 1\}$, **գ)** $\vec{a}\{m, 2, -1\}$ և $\vec{b}\{m, -2m, -3\}$, **դ)** $\vec{a}\{-m, 2, -2\}$ և $\vec{b}\{-2m, m, -4\}$:

242. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված են $A(1, 0, -1)$ և $B(-2, 2, 1)$ կետերը: Գտեք $\overrightarrow{OA}$ և $\overrightarrow{OB}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

243. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված են $A(-1, 1, 2)$ և $B(1, 0, 1)$ կետերը: Oz առանցքի վրա գտեք այնպիսի C կետ, որ $\overrightarrow{OA}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները լինեն ուղղահայաց:

244. Ցույց տվեք, որ $A(0, 2, 1)$, $B(0, 1, 2)$ և $C(\sqrt{2}, 2, 1)$ գագաթներով եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Միավոր շառավիղով գնդային մակերևույթի կենտրոնը կոորդինատների O սկզբնակետն է: Պատկերացրեք, որ O կետից տեղադրված են բոլոր այն վեկտորները, որոնցից յուրաքանչյուրի վերջնակետերն այդ գնդային մակերևույթի կետ է: Այդ ձևով, պատկերավոր ասած, վեկտորների վերջնակետերը «ծածկում են» գնդային մակերևույթը:**
Ինչպիսի՞ վեկտոր կստացվի, եթե գումարենք այդ բոլոր վեկտորները:
Իսկ ի՞նչ պատասխան կունենա խնդիրը, եթե դիտարկենք միայն ոչ բացասական ապլիկատ ունեցող վեկտորները (այսինքն՝ դիտարկենք կիսագնդի մակերևույթը «ծածկող» վերջնակետով վեկտորները):

2. **Վեկտորներով գործողություններ կատարելիս, դուք, հավանաբար, նկատեցիք բազմաթիվ համանմանություններ թվերով կատարվող գործողությունների հետ: Քանի որ ձեզ արդեն ծանոթ է վեկտորի սկալյար քառակուսու հասկացությունը, փորձեք պարզել, թե արդյոք վեկտորների համար նույնպես ճշմարի՞տ են «կրճատ» բազմապատկման $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \pm 2\vec{a}\,\vec{b} + b^2$ և $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2}$ բանաձևերը:**

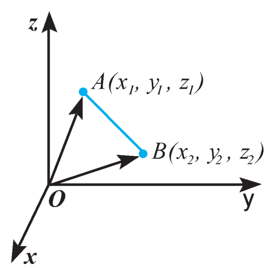
§ 9 ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

9.1. Երկու կետերի հեռավորության բանաձևը: Հատվածի միջնակետի կոորդինատները

Մի շարք երկրաչափական խնդիրներ հարմար է լուծել *կոորդինատների մեթոդի կիրառմամբ*: Դրա համար ներմուծվում է կոորդինատների համակարգ, խնդրի տվյալներն արտահայտվում են կոորդինատներով, և խնդիրը լուծվում է հանրահաշվական բանաձևերի ու գործողությունների օգտագործմամբ: Երկրաչափության մեջ, ընդհանուր առմամբ, կոորդինատների մեթոդի կիրառության շրջանակը շատ լայն է: Այստեղ մենք կդիտարկենք համեմատաբար պարզ խնդիրներ, որոնց լուծման համար հարկավոր է լինելու ունենալ երկու կետերի հեռավորությունը հաշվելու և հատվածի միջնակետի կոորդինատները որոշելու բանաձևեր: Արտածենք այդ բանաձևերը՝ օգտվելով կոորդինատներով տրված վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների հատկություններից:

ա) Կոորդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության բանաձևը

Դիցուք՝ ներմուծված է կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ, տրված են $A(x_1, y_1, z_1)$ և $A(x_2, y_2, z_2)$ կետերը, և պահանջվում է գտնել դրանց հեռավորությունը: Դրա համար տանենք $\vec{OA}$ և $\vec{OB}$ վեկտորները, որոնք կունենան $\vec{OA}\{x_1, y_1, z_1\}$ և $\vec{OB}\{x_2, y_2, z_2\}$ կոորդինատները (նկ. 86): A և B կետերի հեռավորությունը AB հատվածի երկարությունն է, որը հավասար է $\vec{AB}$ վեկտորի մոդուլին: Ուրեմն՝ պետք է գտնել $|\vec{AB}|$-ն:



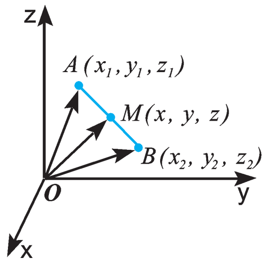
Նկ. 86

Նկատենք, որ $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$: Հետևաբար, $\vec{AB}$ վեկտորը՝ որպես երկու վեկտորների տարբերություն, ունի $\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$ կոորդինատները: Օգտվելով վեկտորի մոդուլի հաշվման բանաձևից՝ կստանանք.

$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$: Այսպիսով, $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$ կետերի հեռավորությունը (նշանակենք d_{AB}) հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} : \qquad (1)$$

Մասնավորապես, եթե երկու կետերն ընկած են Oxy հարթության մեջ, ապա $z_1=z_2=0$, և (1) բանաձևը կհամընկնի հարթաչափությունից մեզ հայտնի $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ բանաձևի հետ:



Նկ. 87

բ) Հատվածի միջնակետի կոորդինատները

Այժմ պարզենք, թե ինչպե՞ս կարելի է գտնել AB հատվածի M միջնակետի կոորդինատները, եթե տրված են այդ հատվածի ծայրակետերի կոորդինատները՝ $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$: Դրա համար տանենք $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ և $\vec{OM}$ վեկտորները (նկ. 87): $\vec{OA}$ և $\vec{OB}$ վեկտորները կունենան $\vec{OA}\{x_1, y_1, z_1\}$ և $\vec{OB}\{x_2, y_2, z_2\}$ կոորդինատները: Եթե M կետի որոնելի կոորդինատները նշանակենք x, y, z, ապա $\vec{OM}$ վեկտորի կոորդինատները կլինեն $\vec{OM}\{x, y, z\}$:

Օգտվենք $\vec{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)$ հավասարությունից (տե՛ս 6.4 կետը) և հաշվի առնենք վեկտորների գումարի, ինչպես նաև վեկտորի ու թվի արտադրյալի կոորդինատների հաշվման կանոնները (տե՛ս 8.1 կետը): Կստանանք, որ $\vec{OM}$ վեկտորի կոորդինատներն են. $\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right\}$: Դա նշանակում է, որ M կետի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad : \qquad (2)$$

Դիտարկենք օրինակ:

Խնդիր. Տրված են ABC եռանկյան գագաթները՝ $A(0, 4, 7)$, $B(1, –5, 0)$, $C(–7, 3, 6)$: Գտնել եռանկյան AM միջնագծի երկարությունը:

Լուծում. Նախ օգտվելով (2) բանաձևերից, BC կողմի M միջնակետի կոորդինատների համար կունենանք՝ $x = \frac{1-7}{2} = -3$, $y = \frac{-5+3}{2} = -1$, $z = \frac{0+6}{2} = 3$:

Այժմ, օգտվելով (1) բանաձևից, գտնենք $A(0, 4, 7)$ և $M(–3, –1, 3)$ կետերի հեռավորությունը՝ $d_{AM} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-4)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$:

Ուրեմն՝ $AM = 5\sqrt{2}$: Պատասխան՝ $5\sqrt{2}$:

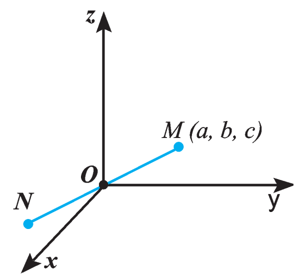
9.2. Համաչափ կետերի կոորդինատները

Հատվածի միջնակետի կոորդինատների բանաձևերի օգնությամբ կարող ենք ցույց տալ, թե ինչ կապեր կան կենտրոնային, առանցքային և հայելային համաչափ կետերի կոորդինատների միջև: Պարզության համար բավարարվենք միայն այն դեպքերի դիտարկմամբ, որոնցում որպես համաչափության կենտրոն է վերցվում կոորդինատների սկզբնակետը, որպես համաչափության առանցք՝ կոորդինատային առանցքներից որևէ մեկը, և որպես համաչափության հարթություն՝ կոորդինատային հարթություններից որևէ մեկը:

ա) Համաչափությունը կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ

Դիցուք՝ տրված է $M(a,b,c)$ կետը, և ուզում ենք որոշել կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ նրան համաչափ N կետի x, y, z կոորդինատները (նկ. 88): Քանի որ M և N կետերը համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, ուրեմն՝ $O(0,\ 0,\ 0)$ կետը MN հատվածի միջնակետն է: Հետևաբար՝ N կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$\frac{x+a}{2}=0,\ \frac{y+b}{2}=0,\ \frac{z+c}{2}=0:$$



Նկ. 88

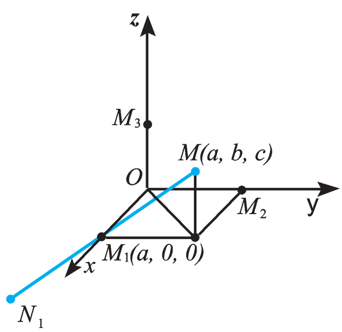
Ստացվում է, որ $x=-a$, $y=-b$, $z=-c$, այսինքն՝ N կետն ունի հետևյալ կոորդինատները՝ $N(-a,\ -b,\ -c)$:

Այսպիսով, *տրված կետի կոորդինատների միջոցով կոորդինատային սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ կետի կոորդինատները որոշելու համար բավական է տրված կետի բոլոր կոորդինատները փոխարինել իրենց հակադիրներով:*

բ) Համաչափությունը կոորդինատային առանցքների նկատմամբ

Դիցուք՝ տրված է $M(a,\ b,\ c)$ կետը, և ուզում ենք որոշել կոորդինատային առանցքներից որևէ մեկի, ասենք՝ Ox առանցքի նկատմամբ նրան համաչափ N_1 կետի x, y, z կոորդինատները (նկ. 89):

Քանի որ M և N_1 կետերը համաչափ են Ox առանցքի նկատմամբ, ապա դժվար չէ նկատել, որ $M_1(a,\ 0,\ 0)$ կետը MN_1 հատվածի միջնակետն է: Հետևաբար՝ N_1 կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

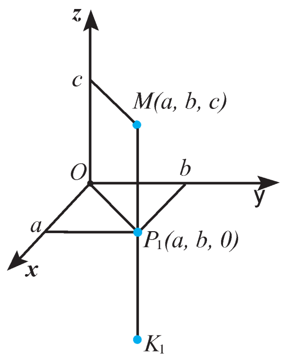


Նկ. 89

$\frac{x+a}{2}=a$, $\frac{y+b}{2}=0$, $\frac{z+c}{2}=0$: Ստացվում է, որ $x=a$, $y=-b$, $z=-c$, այսինքն՝ N_1 կետն ունի հետևյալ կոորդինատները՝ $N_1(a,\ -b,\ -c)$:

Համանման ձևով Oy առանցքի նկատմամբ համաչափ N_2 կետի կոորդինատները կլինեն $N_2(-a,\ b,\ -c)$, իսկ Oz առանցքի նկատմամբ համաչափ N_3 կետի կոորդինատները՝ $N_3(-a,\ -b,\ c)$ (այդ դեպքերը դիտարկեք ինքնուրույն):

Այսպիսով, *տրված կետի կոորդինատների միջոցով որևէ կոորդինատային առանցքի նկատմամբ համաչափ կետի կոորդինատները որոշելու համար բավական է տրված կետի՝ այդ առանցքի անվամբ կոորդինատը թողնել նույնը, իսկ մյուս երկու կոորդինատները փոխարինել իրենց հակադիրներով:*



Նկ. 90

գ) Համաչափությունը կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ

Դիցուք՝ տրված է $M(a,\ b,\ c)$ կետը, և ուզում ենք որոշել կոորդինատային հարթություններից որևէ մեկի, ասենք՝ Oxy հարթության նկատմամբ նրան համաչափ K_1 կետի $x,\ y,\ z$ կոորդինատները (նկ. 90): Քանի որ M և K_1 կետերը համաչափ են Oxy հարթության նկատմամբ, ապա դժվար չէ նկատել, որ $P_1(a,\ b,\ 0)$ կետը MK_1 հատվածի միջնակետն է: Հետևաբար՝ K_1 կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$\frac{x+a}{2}=a\,,\ \frac{y+b}{2}=b\,,\ \frac{z+c}{2}=0\ :$$

Ստացվում է, որ $x=a,\ y=b,\ z=-c$, այսինքն՝ K_1 կետն ունի հետևյալ կոորդինատները՝ $K_1(a,\ b,\ -c)$: Համանման ձևով Oxz հարթության նկատմամբ համաչափ K_2 կետի կոորդինատները կլինեն $K_2(a,\ -b,\ c)$, իսկ Oyz հարթության նկատմամբ համաչափ K_3 կետի կոորդինատները՝ $K_3(-a,\ b,\ c)$:

Այսպիսով, *տրված կետի կոորդինատների միջոցով որևէ կոորդինատային հարթության նկատմամբ համաչափ կետի կոորդինատները որոշելու համար բավական է տրված կետի՝ այդ հարթության անվամբ կոորդինատները թողնել նույնը, իսկ մյուս կոորդինատը փոխարինել իր հակադիրով:*

9.3. Տարածության մեջ տրված մակերևույթի հավասարումը

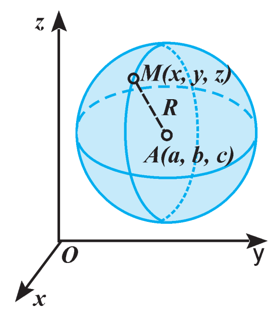
Միջին դպրոցի դասընթացում մենք որոշ գիտելիքներ ենք ստացել կոորդինատային հարթության վրա գծի հավասարման մասին: Մասնավորապես, դիտարկել ենք ուղղի հավասարումը և շրջանագծի հավասարումը: Հիշենք, որ ներմուծված Oxy համակարգում x և y փոփոխականներով $f(x,y)=0$ հավասարումը կոչվում է որևէ L գծի հավասարում, եթե L գծի ցանկացած կետի կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը, իսկ L-ի վրա չընկած կետերի կոորդինատները չեն բավարարում այդ հավասարմանը: Օրինակ, $M(x,y)$ կետը r շառավիղ և $A(a,b)$ կենտրոն ունեցող շրջանագծին պատկանում է այն և միայն այն դեպքում, երբ x-ն ու y-ը բավարարում են $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ հավասարմանը:

Հարթության վրա գծի հավասարման համանմանությամբ տարածության մեջ դիտարկվում է նաև *մակերևույթի հավասարում*: Դիցուք՝ տարածության մեջ ներմուծված է $Oxyz$ կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ, և տրված է որևէ F մակերևույթ, օրինակ՝ հարթություն կամ գնդային մակերևույթ: *$x,\ y,\ z$ փոփոխականներով $f(x,\ y,\ z)=0$ հավասարումը կոչվում է F մակերևույթի հավասարում,* *եթե ցանկացած $M(x, y, z)$ կետ F մակերևույթին պատկանում է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը*: Տարածության մեջ մակերևույթի պարզագույն հավասարում է, օրինակ, $z=0$ հավասարումը, որին բավարարում են Oxy կոորդինատային հարթության կետերի կոորդինատները, իսկ այդ հարթության մեջ չընկած կետերի կոորդինատները տվյալ հավասարմանը չեն բավարարում: Այսինքն՝ $z=0$ հավասարումը Oxy հարթության հավասարումն է: Նմանապես $y=0$ և $x=0$ հավասարումները համապատասխանաբար Oxz և Oyz հարթությունների հավասարումներն են:

Այժմ արտածենք $A(a, b, c)$ կենտրոնով և R շառավիղով գնդային մակերևույթի հավասարումը (նկ. 91):

Կամայական $M(x, y, z)$ կետի հեռավորությունն $A(a, b, c)$ կետից հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝ $d_{MA}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$: Եթե M կետն ընկած է գնդային մակերևույթի վրա, ապա $d_{MA}=R$, կամ $d^2_{MA}=R^2$, այսինքն՝ M կետի կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարմանը՝

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2: \qquad (3)$$



Նկ. 91

Իսկ եթե M կետն ընկած չէ գնդային մակերևույթի վրա, ապա $d_{MA}\neq R$ կամ $d^2_{MA}\neq R^2$ և, ուրեմն, M կետի կոորդինատները (3) հավասարմանը չեն բավարարում: Հետևաբար՝ (3) հավասարումը $A(a, b, c)$ կենտրոնով և R շառավիղով գնդային մակերևույթի հավասարումն է: Մասնավոր դեպքում, երբ գնդային մակերևույթի կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ ($a=b=c=0$), ապա գնդային մակերևույթի հավասարումը կունենա $x^2+y^2+c^2=R^2$ տեսքը:

Ծանոթություն

Երկրաչափական պատկերները կոորդինատների համակարգում կարող են տրվել ոչ միայն հավասարումներով, այլև հանրահաշվական այլ բանաձևերով՝ անհավասարումներով, համակարգերով, համախմբերով:

Օրինակ 1. $A(a, b, c)$ կենտրոնով և R շառավիղով գունդը տրվում է $(x-a^2)+(y-b)^2+(z-c)^2\le R$ անհավասարումով. $M(x, y, z)$ կետն այդ գնդին կպատկանի այն և միայն այն դեպքում, երբ $d_{MA}\le R$:

Օրինակ 2. $\left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array}\right.$ համախմբով տրվում են երկու զուգահեռ հարթություններ, որոնցից մեկը Oxy կոորդինատային հարթությունն է, իսկ մյուսը՝ դրանից 1 միավոր հեռավորություն ունեցող (Oz առանցքը (0,0,1) կոորդինատով կետում հատող) հարթությունը:

Օրինակ 3. $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$ բանաձևով որոշվում է այն խորանարդը, որի գագաթներից մեկը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ այդ գագաթից ելնող կողերը կոորդինատային առանցքների միավոր հատվածներն են:

Օրինակ 4. $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$ բանաձևով տրվում է r շառավիղով և h բարձրությամբ այնպիսի գլանի կողմնային մակերևույթը, որի հիմքերից մեկը գտնվում է Oxy հարթության մեջ, իսկ մյուսը՝ դրանից h հեռավորություն (h>0) ունեցող հարթության մեջ, ընդ որում՝ գլանի առանցքն ընկած է Oz կոորդինատային առանցքի վրա:

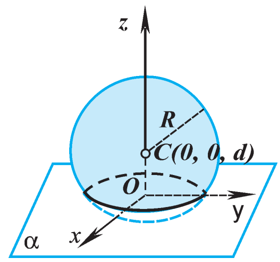
9.4. Կոորդինատների մեթոդի կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս

Երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս կոորդինատների մեթոդը կատարում է օժանդակող դեր՝ հետևյալ երկու առումներով: Այդ մեթոդի կիրառության շնորհիվ հնարավոր է լինում՝ ա) հանրահաշվական բանաձևերի օգտագործման միջոցով գտնել երկրաչափական խնդրի լուծման ավելի հեշտ եղանակ, բ) լրացնել մեր տարածական պատկերացումների հնարավոր բացթողումներն ու սահմանափակությունները: Ասվածը օրինակների վրա ցուցադրելուց առաջ նկատենք, որ որևէ խնդիր կոորդինատների մեթոդով լուծելիս ցանկալի է կոորդինատների համակարգը ներմուծել հնարավորինս հարմար ձևով, այսինքն՝ այնպես, որպեսզի ստացված հանրահաշվական բանաձևերն ունենան ավելի պարզ տեսք: Այժմ ներկայացնենք այնպիսի օրինակներ, որոնք մենք նախկինում դիտարկել ենք առանց կոորդինատների մեթոդի կիրառության (դա մեզ թույլ կտա համեմատել այդ երկու դիտարկումները և հանգել որոշակի հետևության):

Խնդիր 1. Տրված է α հարթություն և R շառավիղով գնդային մակերևույթ, որի կենտրոնի հեռավորությունն այդ հարթությունից հավասար է d-ի: Հատվո՞ւմ են արդյոք այդ գնդային մակերևույթն ու հարթությունը: Եթե այո՛, ապա ի՞նչ պատկեր է առաջանում հատույթում:

Լուծում. Կոորդինատների համակարգը ներմուծենք այնպես, որ α հարթությունը համընկնի Oxy կոորդինատային հարթության հետ, իսկ գնդային մակերևույթի կենտրոնն ընկնի Oz առանցքի վրա՝ $C(0,\ 0,\ d)$ կոորդինատներով կետում (նկ. 92): Այդ դեպքում α հարթությունը տրվում է $z=0$ հավասարումով, իսկ գնդային մակերևույթը՝ $x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$ հավասարումով: Հարթության ու գնդային մակերևույթի ընդհանուր կետերի կոորդինատները պետք է միաժամանակ բավարարեն այդ երկու հավասարումներին: Ուրեմն՝ դրանց հատույթը որոշվում է հետևյալ համակարգով՝ $\begin{cases} x^2+y^2+(z-d)^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$:

Կատարելով տեղադրում՝ ի վերջո ստացվում է $z=0$ և $x^2+y^2=R^2-d^2$ հավասարումների համակարգ: Այսպիսով, երկրաչափական խնդիրը հանգեց հանրահաշվական խնդրի, և այն լուծելու համար պետք է հետազոտել $\begin{cases} x^2+y^2=R^2-d^2 \\ z=0 \end{cases}$ համակարգը:



Նկ. 92

Ստացվում է հետևյալ պատկերը.

Եթե $R>d$ (կամ $R^2-d^2>0$), ապա α հարթության ու գնդային մակերևույթի հատույթը $r=\sqrt{R^2-d^2}$ շառավիղով շրջանագիծ է (քանի որ Oxy հարթության մեջ $x^2+y^2=r^2$ հավասարումով տրվում է շրջանագիծ): Եթե $R=d$ (կամ $R^2-d^2=0$), α հարթությունն ու գնդային մակերևույթն ունենում են միայն մեկ ընդհանուր կետ (քանի որ $x^2+y^2=0$ հավասարմանը բավարարում է միայն (0, 0) թվազույգը): Այդ դեպքում հարթությունը շոշափում է գնդային մակերևույթը: Իսկ եթե $R<d$ (կամ $R^2-d^2<0$), ապա α հարթությունն ու գնդային մակերևույթը հատման կետ չունեն:

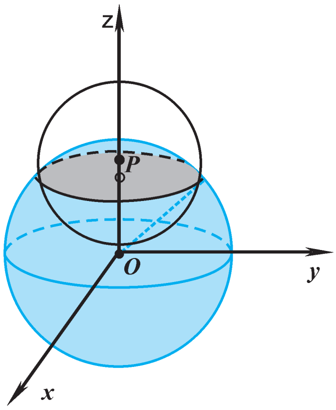
Դիտարկենք համանման ևս մեկ խնդիր, որը վերաբերում է երկու գնդային մակերևույթների փոխդասավորությանը*:

Խնդիր 2. Ի՞նչ պատկեր է առաջանում այն երկու գնդային մակերևույթների հատումից, որոնցից մեկի շառավիղը 7 է, մյուսինը՝ 5, իսկ կենտրոնների հեռավորությունը՝ 6:

Լուծում. Մեծ շառավիղով գնդային մակերևույթի կենտրոնը նշանակենք O, փոքրինը՝ P: Կոորդինատների համակարգը ներմուծենք այնպես, որ կոորդինատների սկզբնակետը համընկնի O կետի հետ, և Oz առանցքն անցնի P կետով՝ $\overrightarrow{OP}$ վեկտորի ուղղությամբ (նկ. 93): 7 և 5 շառավիղներով գնդային մակերևույթ-

---

* Դիտարկումները հեշտացնելու նպատակով՝ խնդրի պայմանը ներկայացվում է թվային տվյալներով: Ցանկության դեպքում դուք կարող եք դիտարկել նույն խնդիրը՝ տառերով արտահայտված տվյալներով, և կատարել հնարավոր դեպքերի վերլուծություն:



Նկ. 93

ների կենտրոնները համապատասխանաբար կունենան $O(0,\ 0,\ 0)$ և $P(0,\ 0,\ 6)$ կոորդինատները: Այդ դեպքում գնդային մակերևույթներից առաջինը տրվում է $x^2+y^2+z^2=49$ հավասարումով, իսկ երկրորդը՝ $x^2+y^2+(z-6)^2=25$ հավասարումով: Այդ երկու մակերևույթների հատումից առաջացած պատկերը որոշվում է $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49 \\ x^2+y^2+(z-6)^2=25 \end{cases}$ համակարգով:

Կատարելով որոշ ձևափոխություններ՝ ստացվում է $\begin{cases} x^2+y^2=24 \\ z=5 \end{cases}$ համակարգը: Իսկ այս համակարգով տրվում է $r=2\sqrt{6}$ շառավիղով շրջանագիծ՝ z=5 հարթության մեջ: Այսինքն՝ այդ երկու գնդային մակերևույթների հատումից առաջանում է $2\sqrt{6}$ շառավիղով շրջանագիծ:

Պարզաբանում

Այժմ անդրադառնանք կոորդինատների մեթոդի օժանդակող դերին վերաբերող վերևում հիշատակված հարցադրմանը: Դիտարկված խնդիրները, անշուշտ, կարելի է լուծել նաև առանց կոորդինատների մեթոդի օգնության: Մասնավորապես, խնդիր 2-ում եթե կարողանայինք պատկերացնել, որ հատույթում առաջանում է շրջանագիծ, ապա այդ շրջանագծի շառավիղը հնարավոր էր գտնել նաև զուտ երկրաչափական եղանակով: Սակայն այդպիսի լուծումը դեռևս հիմնավոր չէր համարվի, քանի դեռ մենք ցույց չէինք տվել, որ այդ հատույթն իրոք շրջանագիծ է. չէ՞ որ շրջանագիծ լինելու վերաբերյալ մեր ակնառու պատկերացումների ճշտությունը կարող էր և չհաստատվել: Ուրեմն, կոորդինատների մեթոդի շնորհիվ մենք կարողացանք իրոք խուսափել մեր պատկերացումների հնարավոր բացթողումների հետևանքներից:

Մի նկատառում ևս. խնդիր 2-ի լուծման արդյունքում (ընդ որում՝ տառային տվյալներով ձևակերպման դեպքում նույնպես) հանգում ենք $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ z=n \end{cases}$, ($m$-ը և n-ը որևէ թվեր են) տեսքի համակարգի, ինչին հանգել էինք խնդիր 1-ի լուծման արդյունքում:

Դրանից մենք կարող ենք եզրակացնել, որ գնդային մակերևույթը մեկ այլ գնդային մակերևույթով հատելու խնդիրն ի վերջո հանգում է այդ գնդային մակերևույթը հարթությամբ հատելու խնդրին: Այդպիսի եզրակացության համար հիմք է ծառայում այն հանգամանքը, որ երկու դեպքում էլ հատույթի պատկերը տրվում է նույն տեսքի հանրահաշվական բանաձևով: Ուրեմն, հանրահաշվական բանաձևերի միջև նմանություններ ու տարբերություններ նկատելով՝ կարող ենք որոշակի եզրակացություններ անել նաև այդ բանաձևերով տրվող երկրաչափական պատկերների վերաբերյալ: Այլ կերպ ասած՝ կոորդինատների մեթոդը երկրաչափական պատկերների հետազոտման հարցում ունի նաև էվրիստիկական* դերակատարություն:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

245. Գտեք հետևյալ կետերի հեռավորությունը՝ **ա)** $A(1, 0, -2)$ և $B(-1, 2, -3)$, **բ)** $C(5, 7, -10)$ և $D(-2, 11, -6)$:
246. Տրված $A(-2, 1, 5)$ և $B(2, -2, 4)$ կետերից ո՞րն է ավելի մոտ կոորդինատների սկզբնակետին:
247. Գտեք $A(3, 4, -3)$ կետի հեռավորությունները՝ **ա)** կոորդինատային հարթություններից, **բ)** կոորդինատային առանցքներից:
248. Հաշվեք $A(1, 2, 3)$, $B(4, -2, 3)$ և $C(3, 0, 1)$ գագաթներով եռանկյան պարագիծը:
249. Գտեք Ox առանցքի վրա ընկած այն C կետը, որը հավասարահեռ է $A(-2, 1, 3)$ և $B(1, 2, 3)$ կետերից:
250. m թվի ի՞նչ արժեքների դեպքում $A(m, 3, -5)$, $B(2, 10, -5)$ և $C(2, 3, 2)$ գագաթներով ABC եռանկյունը կլինի հավասարակողմ:
251. B կետը AC հատվածի միջնակետն է: Գտեք՝ **ա)** B կետի կոորդինատները, եթե տրված են $A(7, -4, 1)$ և $C(-3, 2, -5)$ կետերը, **բ)** A կետի կոորդինատները, եթե տրված են $B(0, -2, 4)$ և $C(6, 0, -2)$ կետերը:
252. Տրված են եռանկյան գագաթների կոորդինատները՝ $A(8, 2, 6)$, $B(4, -4, 2)$ և $C(-2, 0, -4)$: Գտեք ABC եռանկյան միջին գծերով կազմված եռանկյան գագաթների կոորդինատները:
253. Տրված են $A(-6, 3, 4)$ և $B(-2, -1, 6)$ կետերը: Գտեք AB հատվածի միջնակետի հեռավորությունը՝ **ա)** կոորդինատների սկզբնակետից, **բ)** կոորդինատային հարթություններից:
254. Գտեք $ABCD$ զուգահեռագծի D գագաթի կոորդինատները, եթե նրա մյուս երեք գագաթների կոորդինատները տրված են.
ա) $A(2, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(4, 1, 0)$, **բ)** $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-1, 0, 1)$:

* Գիտելիքների հայտնագործման և խնդիրների լուծման այնպիսի եղանակ, որի շնորհիվ որոնումների ընթացքում կրճատվում են դիտարկվող քայլերի թիվը և անակնկալ ձևով հանգում խնդրի լուծմանը:

255. Տրված են $A(1, 0, -2)$ և $B(0, 0, 3)$ կետերը: Գտեք այն կետերի կոորդինատները, որոնք տրված այդ կետերին համաչափ են՝ **ա)** կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ, **բ)** կոորդինատային առանցքների նկատմամբ:

256. Գտեք $A(2, -2, 1)$ կետի հեռավորությունն այն կետից, որը A կետին համաչափ է՝ **ա)** կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, **բ)** կոորդինատային Oxz հարթության նկատմամբ, **գ)** կոորդինատային Oz առանցքի նկատմամբ:

257. Տրված $A(1, 2, 3)$ կետի համաչափ կետը Oxz հարթության նկատմամբ A_1 կետն է, Oy առանցքի նկատմամբ՝ A_2 կետը, իսկ Ox առանցքի նկատմամբ՝ A_3 կետը: Գտեք AA_1, AA_2 *և* A_2A_3 հատվածների M_1, M_2 և M_3 միջնակետերի կոորդինատները:

258. OAB եռանկյան O գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ $A(-3, 4, 5)$ գագաթը Oxy հարթության նկատմամբ համաչափ է B գագաթին: Ցույց տվեք, որ OAB եռանկյունը հավասարասրուն է, և գտեք նրա՝ **ա)** O գագաթից տարված միջնագծի երկարությունը, **բ)** պարագիծը:

259. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի համաչափության կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ նիստերից յուրաքանչյուրը կոորդինատային հարթություններից որևէ մեկին զուգահեռ է: Գիտենալով $A(2, 2, -2)$ և $B(-2, 2, -2)$ գագաթների կոորդինատները՝ գտեք խորանարդի մյուս գագաթների կոորդինատները:

260. Ի՞նչ պատկեր են կազմում տարածության այն բոլոր կետերը, որոնց՝ **ա)** աբսցիսը և օրդինատը զրո են՝ $x=0$ և $y=0$, **բ)** աբսցիսը և ապլիկատը զրո են՝ $x=0$ և $z=0$, **գ)** օրդինատը և ապլիկատը զրո են՝ $y=0$ և $z=0$:

261. Ի՞նչ պատկեր են կազմում տարածության բոլոր այն կետերը, որոնց՝ **ա)** առաջին կոորդինատը 1 է ($x=1$), **բ)** երկրորդ կոորդինատը 1 է ($y=1$), **գ)** առաջին և երկրորդ կոորդինատները 1 են ($x=1$ և $y=1$):

262. Գտեք այն գնդային մակերևույթի R շառավիղն ու M կենտրոնի կոորդինատները, որը տրված է հետևյալ հավասարումով՝

ա) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$,

բ) $(x+1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 3$,

գ) $x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 32$:

263. Գրեք C կենտրոնով և R շառավիղով գնդային մակերևույթի հավասարումը՝ **ա)** $R=2$, $C(0, -1, 2)$, **բ)** $R = 2\sqrt{3}$, $C(2, -3, 0)$:

264. Ցույց տվեք, որ հետևյալ հավասարումները գնդային մակերևույթի հավասարում են, յուրաքանչյուրի համար որոշեք շառավիղը և կենտրոնի կոորդինատները.

ա) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 8$,

բ) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y = 11$,

գ) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 7 = 0$:

265. Գրեք գնդային մակերևույթի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ $A(-3, 6, -4)$ և $B(1, -2, 0)$ ծայրակետերով AB հատվածը տրամագիծ է:

266. $A(0, \sqrt{3}, -2)$ կետն ընկած է $C(3, 0, 0)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի վրա: Գրեք այդ գնդային մակերևույթի հավասարումը: Պարզեք, թե այդ գնդային մակերևույթն արդյոք անցնո՞ւմ է **ա)** $B(5, 2\sqrt{3}, 0)$ կետով, **բ)** C(4, –3, 2) կետով:

267. Ի՞նչ փոխդասավորություն ունեն $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$ հավասարումով տրված գնդային մակերևույթն ու հետևյալ կետը՝ **ա)** $O(0, 0, 0)$, **բ)** $A(2, 0, 0)$, **գ)** $B(1, 1, 1)$, **դ)** $C(1, 0, -2)$:

268. Գրեք $M(3, 2, 1)$ կենտրոնով այն գնդային մակերևույթի հավասարումը, որը շոշափում է կոորդինատային՝ **ա)** Oxy հարթությունը, **բ)** Oyz հարթությունը:

269. Ի՞նչ փոխդասավորություն ունեն $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ հավասարումով տրված գնդային մակերևույթը և կոորդինատային հարթություններից յուրաքանչյուրը:

270*. Գրեք R=1 շառավիղով այն գնդային մակերևույթի հավասարումը, որը շոշափում է բոլոր երեք կոորդինատային հարթությունները: Այդպիսի քանի՞ գնդային մակերևույթ կա:

271. Գտեք այն շրջանագծի շառավիղն ու կենտրոնի կոորդինատները, որն առաջանում է Oxy հարթության և $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 10$ հավասարումով տրված գնդային մակերևույթի հատումից:

272. Ի՞նչ փոխդասավորություն ունեն $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$ և $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$ հավասարումներով տրված գնդային մակերևույթները:

273*. 5 և 4 շառավիղներով երկու գնդային մակերևույթների կենտրոնների հեռավորությունը a է: a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում այդ երկու գնդային մակերևույթները կհատվեն, և ի՞նչ արժեքի դեպքում հատույթի եզրագծի երկարությունը կլինի առավելագույնը:

274. Ի՞նչ պատկեր է ներկայացնում այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ համակարգին.

ա) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, **բ)** $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x = 0 \end{cases}$, **գ)** $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + z^2 \le 9 \\ z \ge 0 \end{cases}$:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Վերանայեք 9.4 կետի խնդիր 1-ի և խնդիր 2-ի լուծումները: Փորձեք պարզել, թե այդ լուծումների մեջ ի՞նչ կերպ է իրականացված հնարավորինս հարմար կոորդինատների համակարգ ներմուծելու «հանձնարարականը»: Այդ խնդիրներից որևէ մեկի լուծման համար կարո՞ղ եք առաջարկել կոորդինատների համակարգի ներմուծման մեկ այլ տարբերակ, որը նույնպես, ըստ ձեզ, կլինի հարմար:**

2. Ընթերցեք հետևյալ տեքստը

Ռընե Դեկարտը, ում անունը հայտնի է որպես ականավոր մաթեմատիկոս և փիլիսոփա, զարմանալի խորաթափանցություն է ցուցաբերել նաև այլ գիտությունների, մասնավորապես, ֆիզիկայի, տիեզերագիտության, կենսաբանության բնագավառներում: Ֆիզիկայում նա բացահայտել է շարժման քանակի (իմպուլսի) պահպանման օրենքը, ներմուծել ուժի իմպուլսի հասկացությունը, հիմնավորել լուսային ճառագայթների բեկման օրենքը: Տիեզերագիտության մեջ Դեկարտը մշակել է ուսմունք Արեգակնային համակարգի ծագման և զարգացման բնական ընթացքի մասին: Կենսաբանության մեջ նա առաջինն է փորձել պարզել ռեֆլեկտորային ռեակցիայի էությունը կենդանի օրգանիզմների համար, գաղափար է տվել պայմանական և բնածին (ոչ պայմանական) ռեֆլեքսների մասին: Ակնառու է նրա ներդրումը նաև բժշկագիտության մեջ:

Դեկարտն առավել հանգամանորեն է հետազոտել մարդու և հատկապես մարդկային բանականության բնույթի բացահայտմանը վերաբերող հիմնահարցերը: Դեկարտի ընկալմամբ՝ մարդուն բնորոշ հատկանիշն այն է, որ նա օժտված է կամքով և մտածողությամբ: Նրան է պատկանում *«Մտածում եմ, ուրեմն գոյություն ունեմ»* հանրահայտ ասույթը, որն արտահայտում է նրա աշխարհընկալումը մարդու էության մասին: Ըստ Դեկարտի՝ մարդու մտածողությունը միտված է ճշմարիտի բացահայտմանը, իսկ բացահայտումների ընթացքում մտածողության ելակետը կասկածն է (նրա այդ մոտեցմանը համահունչ կլիներ, եթե ասեր՝ «Կասկածում եմ, ուրեմն մտածում եմ»): Ըստ այդմ էլ՝ նա իր «Քննախոսություն մեթոդի մասին ...» հանրահայտ գրքում ձևակերպել է կանոններ, որոնք պետք է պահպանել, որպեսզի երաշխավորվի բացահայտված գիտելիքների ճշմարիտ լինելը: Այդ կանոնների իմացությունն օգտակար է յուրաքանչյուր մարդու համար, ուստի այստեղ համառոտ կներկայացնենք դրանցից մի քանիսի բովանդակությունը:

Առաջին

Ոչ մի միտք, ինչ էլ որ լինի, չընդունել իբրև ճշմարիտ, քանի դեռ չի հաստատվել ու ճանաչվել դրա անկասկած ճշմարիտ լինելը, այսինքն՝ հետևողականորեն խուսափել հապճեպ և կանխակալ կարծիքներից, ընդունելի համարել միայն այնպիսի մտքերը, որոնք ներկայացվում են այնքան պարզորոշ ու համոզիչ, որ ոչ մի կերպ կասկածներ չեն հարուցում:

Երկրորդ

Դժվարկումներ անելիս յուրաքանչյուր դժվարին խնդիր տրոհել պարզ մասերի այնքան, ինչքան հարկ կլինի, որպեսզի դրանք ավելի լավ լուծվեն:

Երրորդ

Որևէ երևույթ ուսումնասիրելիս ղեկավարել սեփական մտքերի ընթացքը. սկսելով պարզագույնից ու հեշտ ճանաչելիից՝ աստիճանաբար բարձրանալ, ինչպես սանդուղքով, դեպի առավել դժվար ճանաչելին, ընդ որում՝ ճանաչողության ընթացքում աստիճանակարգում կարգաբերել նույնիսկ այն դեպքերում, երբ իրերի բնական կառույցում այդպիսի հաջորդականությունը բացակայում է:

Չորրորդ

Ամեն մի գործի համար ունենալ անհրաժեշտ քայլերի ու պարագաների լրիվ ցանկ և այնպիսի բազմակողմանի հայացք, որպեսզի վստահություն լինի այն բանում, որ ոչ մի բացթողում չի եղել:

Վերջինը

Երևույթներ ուսումնասիրելիս ապավինել սեփական ուժերին և չսպասել երկնային հրաշքներ ու հայտնություններ:

Տեքստի և նրանում արծարծված հարցերի շուրջ քննարկումներ արեք:

Նաև պատասխանեք հետևյալ հարցերին.

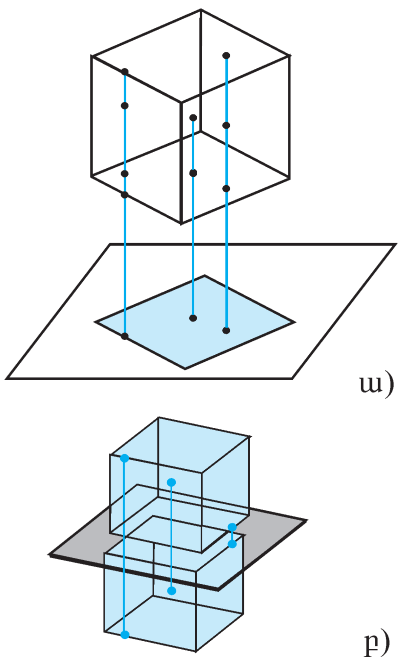
ա) ուրիշ ո՞ր գիտնականների անունները կթվարկեք, որոնք նույնպես լուրջ ավանդ են ունեցել ոչ թե մեկ, այլ մի քանի բնագավառներում,

բ) կարո՞ղ եք որևէ փաստարկ բերել Դեկարտի ներկայացրած այս կամ այն կանոնի օգտին: Նկարագրեք իրադրություններ, որոնցում այդ կանոնների կիրառումը օգտակար կլինի ձեզ համար:

§ 10 ԳԱՂԱՓԱՐ ՇԱՐԺՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

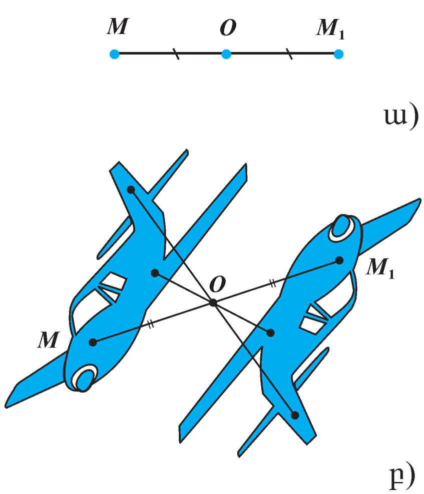
10.1. Ի՞նչ է շարժումը երկրաչափության մեջ

Մարդիկ միշտ էլ գործ են ունեցել տարբեր առարկաների ու դրանց պատկերների հետ, համեմատել են առարկաներն ու նրանց պատկերները, ինչպես նաև նույն առարկայի տարբեր պատկերները: Բնության մեջ հաճախակի հանդիպող այդպիսի պատկերներ են, օրինակ, արևոտ օրերին մարմինների ստվերները գետնի մակերևույթի վրա և նրանց հայելային արտացոլանքները ջրի մակերևույթի մեջ: Նշված պատկերների առաջացման գործում կարևոր դեր ունեն լուսային ճառագայթները, որոնց միջոցով հարաբերակցություն է ստեղծվում մարմնի կետերի ու նրա պատկերի կետերի միջև: Դրանց համանման են մարմնի ու հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի կետերի միջև հարաբերակցությունը (նկ. 94, ա) և մարմնի կետերի ու հարթության նկատմամբ նրա հայելային համաչափ պատկերի կետերի միջև հարաբերակցությունը (նկ. 94, բ): Սակայն նկատենք, որ մարմնի այդ երկու պատկերների՝ ստվերի (պրոյեկցիայի) և հայելային համաչափ պատկերի միջև կա մի էական տարբերություն: Չնայած երկու պատկերում էլ մարմնի յուրաքանչյուր կետին հարաբերակցվում է պատկերի ինչ որ կետ, սակայն ստվերի վրա նույն կետին կարող է հարաբերակցվել մարմնի տարբեր կետեր (նկ. 94, ա): Մինչդեռ հայելային համաչափ պատկերում այդպես չէ. մարմնի տարբեր կետերին հարաբերակցվում են պատկերի տարբեր կետեր, պատկերի ամեն մի կետը հարաբերակցվում է մարմնի միայն մեկ կետի հետ (նկ. 94, բ): Երկրորդ դեպքում ասում են, որ *մարմնի կետերի ու նրա պատկերի կետերի միջև հարաբերակցությունը փոխմիարժեք է, իսկ առաջին դեպքում այդ հարաբերակցությունը փոխմիարժեք չէ*:



Նկ. 94

Երկրաչափության մեջ տարբեր պատկերների կետերի միջև փոխմիարժեք հարաբերակցությանը վերաբերող հարցերի հետազոտումն ունի կարևոր նշանակություն: Այստեղ մենք քննության կառնենք այդպիսի մի քանի հարցեր՝ դիտարկելով հիմնականում ծանոթ օրինակներ, որոնք պատկերացում կտան տարածության շարժման մասին:



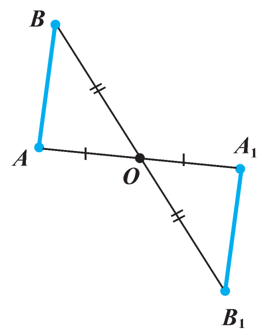
Նկ. 95

Դիցուք՝ նշվում է որևէ եղանակ, որը թույլ է տալիս տարածության յուրաքանչյուր կետի համար ցույց տալ, թե ո՞ր կետի հետ է այն հարաբերակցվում: Որպես այդպիսի եղանակ կարող է ծառայել, օրինակ, որևէ O կենտրոնի նկատմամբ համաչափությունը: Այդ դեպքում տարածության կամայական M կետը հարաբերակցվում է O կետի նկատմամբ նրա համաչափ M_1 կետի հետ (նկ. 95):

Եթե տարածության կետերի միջև ստեղծվում է այնպիսի հարաբերակցություն, որ՝ **ա)** յուրաքանչյուր M կետին հարաբերակցվում է որևէ M_1 կետ, և **բ)** ցանկացած M_1 կետը հարաբերակից է ինչ-որ, ընդ որում միայն մեկ M կետի հետ, ապա կասենք, որ *տարածությունն արտապատկերվում է ինքն իր մեջ*: Այդ դեպքում նաև կասենք, որ *M կետը փոխադրվում է M_1 կետին*, և *M_1 կետը M կետի արտապատկերն է* (երբեմն նաև ասում են, որ *M կետը M_1 կետի նախապատկերն է*):

Տարածության ինքն իր մեջ արտապատկերման՝ մեզ արդեն ծանոթ օրինակներ են կենտրոնային, առանցքային և հայելային համաչափությունները: Եթե տարածության ցանկացած կետ համապատասխանեցվի տրված կենտրոնի (առանցքի կամ հարթության) նկատմամբ համաչափ կետի հետ, ապա այդ դեպքում կբավարարվեն տարածության արտապատկերում լինելու ա) և բ) պահանջները: Հայտնի են տարածության արտապատկերումների բազմաթիվ այլ օրինակներ ևս:

Առանձնահատուկ կարևորություն ունեն տարածության հատկապես այնպիսի արտապատկերումները, որոնց դեպքում կետերի միջև հեռավորությունները պահպանվում են: Դա պարզաբանենք մեզ քաջ հայտնի կենտրոնային համաչափության օրինակով: Դիցուք՝ O-ն համաչափության կենտրոնն է, և տարածության տվյալ արտապատկերման դեպքում յուրաքանչյուր կետ փոխադրվում է O կետի նկատմամբ իրեն համաչափ կետին: Վերցնենք կամայական երկու՝ A և B կետեր, որոնք փոխադրվում են համապատասխանաբար A_1 և B_1 կետերին (նկ. 96): Պարզենք այն հարցը, թե A և B կետերի հեռավորությունն արդյոք հավասա՞ր է A_1 և B_1 կետերի հեռավորությանը: Դրա համար դիտարկենք OAB և OA_1B_1 եռանկյունները: Դժվար չէ նկատել, որ ըստ եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի՝ դրանք հավասար են (ըստ կենտրոնային համաչափության սահմանման՝ $OA=OA_1$ և $OB=OB_1$, իսկ $\angle AOB=\angle A_1OB_1$ որպես հակադիր անկյուններ):



Նկ. 96

Ուրեմն՝ $AB=A_1B_1$:

Այսինքն՝ կենտրոնային համաչափության դեպքում տարածության կետերը փոխադրվում են այնպես, որ ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը փոխադրման արդյունքում չի փոխվում:

Պարզվում է, որ տարածության ոչ բոլոր արտապատկերումների դեպքում է պահպանվում կետերի միջև հեռավորությունը, օրինակ՝ պրոյեկտումը որևէ հարթության վրա (մենք կդիտարկենք նաև այլ օրինակներ): Տարածության այն արտապատկերումները, որոնց արդյունքում կետերի միջև հեռավորությունները պահպանվում են, երկրաչափության մեջ կոչվում են *շարժումներ*: Մենք արդեն ցույց տվեցինք, որ կենտրոնային համաչափությունը ներկայացնում է տարածության շարժում: Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ առանցքային և հայելային համաչափությունները ևս շարժումներ են: Այսինքն՝ առանցքային և հայելային համաչափությունների դեպքում նույնպես տարածության բոլոր կետերը փոխադրվում են այնպես, որ ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը փոխադրման արդյունքում մնում է նույնը (տե՛ս խնդիր N 279-ը):

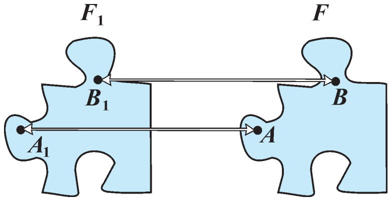
Պարզաբանում

Տարածության շարժման արդյունքում ցանկացած F պատկեր փոխադրվում է մի որոշակի F_1 պատկերի, որը կազմվում է բոլոր այն կետերից, որոնց փոխադրվում են F պատկերի կետերը տարածության տվյալ արտապատկերման արդյունքում: Կետի և առհասարակ կամայական պատկերի այդպիսի փոխադրումն ընկալվում է որպես նրա դիրքի փոխադրում մեկ այլ դիրքի, և այդ առումով էլ անվանվում է շարժում: Երկրաչափության մեջ «շարժում» հասկացության համար որպես իրական նախատիպ է հանդիսանում պինդ մարմնի շարժումը (մեխանիկական տեղափոխությունը), որի ընթացքում պահպանվում են մարմնի ձևն ու չափսերը: Սակայն, ի տարբերություն սովորական (այդ թվում և ֆիզիկայի տեսանկյունից) ընկալված շարժման, երկրաչափության մեջ շարժումն ընկալվում է ոչ թե կարևորելով կետերի դիրքերի փոփոխության ընթացքը, այլ միայն սկզբնական և վերջնական դիրքերի համապատասխանությունը:

10.2. Շարժման հիմնական հատկությունները

Տարածության շարժման արդյունքում, ինչպես ասվեց, տարածության մեջ ընկած յուրաքանչյուր F պատկեր փոխադրվում է մի որոշակի F_1 պատկերի: Այդ դեպքում F և F_1 պատկերների կետերի միջև ստեղծվում է փոխմիարժեք համապատասխանություն այնպես, որ պատկերներից մեկի ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը հավասար է մյուս պատկերի՝ դրանց համապատասխան երկու կետերի հեռավորությանը: Շարժման հասկացության սահմանումից անմիջականորեն հետևում է, որ շարժումն օժտված է հետևյալ հատկություններով.

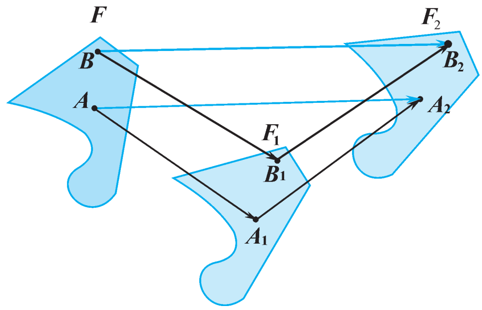
1. Շարժումը հակադարձելի է, որից հետևում է, որ եթե մի շարժման արդյունքում կամայական F պատկերը փոխադրվում է F_1 պատկերին, ապա գոյություն ունի նաև այնպիսի շարժում, որի արդյունքում F_1 պատկերը փոխադրվում է F պատկերին (նկ. 97):



Նկ. 97

2. *Շարժումը փոխանցելի է*, որից հետևում է, որ եթե նախ մի շարժման արդյունքում F պատկերը փոխադրվում է F_1 պատկերին, հետո երկրորդ շարժման արդյունքում F_1 պատկերը փոխադրվում է F_2 պատկերին, ապա

վերջնարդյունքում F պատկերը փոխադրվում է F_2 պատկերին (նկ. 98): Այդ դեպքում F պատկերի ցանկացած երկու A և B կետերի հեռավորությունը հավասար է F_2 պատկերի այն երկու A_2 և B_2 կետերի հեռավորությանը, որոնք (առաջին շարժման միջնորդավորմամբ) հարաբերակցվում են A և B կետերին:



Նկ. 98

Պարզաբանում

Երկրաչափական պատկերների հատկությունների համար կարևոր նշանակություն ունի կետերի հեռավորությունը: Եվ քանի որ շարժման դեպքում կետերի հեռավորությունները պահպանվում են, ուրեմն պահպանվում են նաև երկրաչափական պատկերների հատկությունները: Պարզվում է, որ դրա հիմքում ընկած է հետևյալ պնդումը:

Շարժման դեպքում մի ուղղի վրա ընկած կամայական երեք կետերը փոխադրվում են մի ուղղի վրա ընկած երեք կետերի, իսկ մի ուղղի վրա չընկած երեք կետերը՝ մի ուղղի վրա չընկած երեք կետերի:

Այս պնդման օգնությամբ էլ ապացուցվում է, որ շարժման դեպքում՝

ա) հատվածը փոխադրվում է հատվածի,

բ) ուղիղը փոխադրվում է ուղղի,

գ) ճառագայթը փոխադրվում է ճառագայթի,

դ) հարթությունը փոխադրվում է հարթության,

ե) կիսահարթությունը փոխադրվում է կիսահարթության:

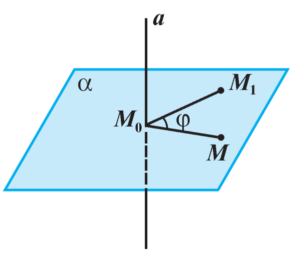
Պարզվում է նաև, որ շարժման դեպքում երկրաչափական պատկերները փոխադրվում են համանուն պատկերների. եռանկյունը՝ եռանկյան, քառանկյունը՝ քառանկյան, շրջանագիծը՝ շրջանագծի, և այլն: Ավելին, *կամայական եռանկյունը փոխադրվում է իրեն հավասար եռանկյան:* Իսկապես, եթե ABC եռանկյան AB, BC և CA կողմերը փոխադրվում են համապատասխանաբար A_1B_1, B_1C_1 և C_1A_1 հատվածների, ապա քանի որ $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CA=C_1A_1$, ուրեմն՝ ըստ եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են: Դրանից կարող ենք անել նաև այլ հետևություններ ևս, ինչպես, օրինակ՝ *շարժման արդյունքում յուրաքանչյուր անկյուն փոխադրվում է իրեն հավասար անկյան:* Եվ առհասարակ պարզվում է, որ ուղիղների ու հարթությունների փոխդասավորությունները (ասենք՝ զուգահեռություն, ուղղահայացություն և այլն) շարժման դեպքում պահպանվում են:

10.3. Ծանոթություն շարժումների որոշ տեսակների հետ

Ինչպես արդեն ասվել է, կենտրոնային, առանցքային և հայելային համաչափությունները շարժումներ են: Կան նաև շարժումների այլ օրինակներ, որոնցից այստեղ կդիտարկենք ևս երկուսը՝ պտույտը և զուգահեռ տեղափոխությունը. դրանց օրինակով էլ կհամոզվենք, որ շարժումները ըստ տեսակի կարող են լինել տարբեր:

Պտույտ

Առանցքի շուրջ պտույտի օրինակներ իրականության մեջ հանդիպում են հաճախ: Այդպիսի օրինակի պատկերացում են տալիս անիվի, դռան կամ, ասենք, երկրագնդի պտույտները իրենց առանցքների շուրջը: Մենք արդեն դիտարկել ենք նաև պտտական մարմիններ, որոնց նկարագրման մեջ նույնպես խոսել ենք որևէ առանցքի շուրջը պտույտի մասին: Այժմ կդիտարկենք պտույտը՝ որպես տարածության արտապատկերում:



Նկ. 99

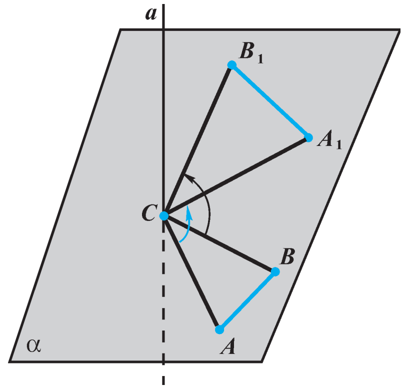
Դիցուք՝ տրված է որևէ a ուղիղ (*առանցք*) և φ մեծությամբ անկյուն (*պտույտի անկյուն*): Պատկերացնենք, որ տարածության յուրաքանչյուր M կետը հարաբերակցվում է այնպիսի M_1 կետի հետ, որը որոշվում է ըստ հետևյալ պայմանների (նկ. 99).

ա) M_1 կետն ընկած է այն α հարթության մեջ, որն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է a ուղղին,

բ) M_1 և M կետերը a ուղղից հավասարահեռ են (այսինքն՝ $M_1M_0=MM_0$, որտեղ M_0-ն a ուղղի և α հարթության հատման կետն է),

գ) $\angle M_1M_0M$ -ը հավասար է պտույտի φ անկյանը՝ $\angle M_1M_0M = \varphi$ (եթե M կետն ընկած է a ուղղի վրա, ապա M_1 կետը համընկնում է M կետի հետ): Տարածության այսպիսի արտապատկերման դեպքում կասենք, որ *M կետը M_1 կետին փոխադրվում է a առանցքի շուրջը φ անկյամբ պտույտով*: Ընդ որում՝ φ անկյունով պտույտը կարող է կատարվել ինչպես ժամսլաքի, այնպես էլ դրա հակառակ ուղղությամբ, սակայն *տվյալ պտույտի դեպքում տարածության բոլոր կետերի համար այդ ուղղությունը պետք է լինի միակերպ*: Նկատենք, որ առանցքային համաչափությամբ արտապատկերումը պտույտի մասնավոր դեպք է. a առանցքի նկատմամբ համաչափությունը պտույտ է a առանցքի շուրջը, երբ պտույտի անկյունը 180° է:

Պարզվում է, որ ինչպես a առանցքի նկատմամբ համաչափությունը, այնպես էլ a առանցքի շուրջը φ անկյամբ պտույտը շարժում է: Այսինքն՝ *տարածության՝ ըստ պտույտի արտապատկերման դեպքում կետերի միջև հեռավորությունները մնում են անփոփոխ:*



Նկ. 100

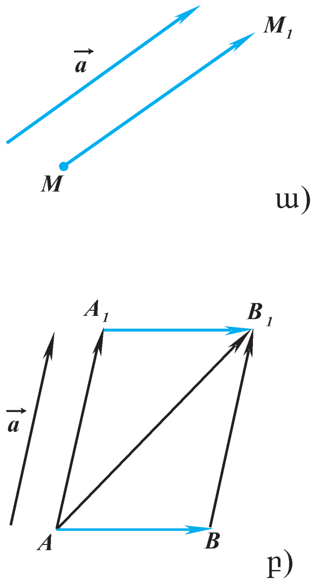
Դա ցույց տանք՝ բավարարվելով միայն նկար 100-ում պատկերված դեպքի դիտարկումով, երբ կամայական վերցված A և B կետերն ընկած են a առանցքին ուղղահայաց նույն α հարթության մեջ: Դիցուք՝ A և B կետերը a առանցքի շուրջը φ անկյունով պտույտի արդյունքում փոխադրվել են համապատասխանաբար A_1 և B_1 կետերին: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում AB և A_1B_1 հեռավորությունները միմյանց հավասար են: Դրա համար նկատենք, որ ABC և A_1B_1C եռանկյունները հավասար են (C-ն a ուղղի և α հարթության հատման կետն է): Իսկապես, պտույտի սահմանումից բխում է, որ $AC=A_1C$, $BC=B_1C$, իսկ $\angle ACB$ և $\angle A_1CB_1$ անկյունների հավասարությունը հետևում է $\angle A_1CA = \angle B_1CB = \varphi$ հավասարությունից: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության 1-ին հայտանիշի՝ $\Delta ACB=\Delta A_1CB_1$, և, ուրեմն, $AB = A_1B_1$:

Այսպիսով, տարածության՝ ըստ պտույտի արտապատկերումն իրոք շարժում է, ընդ որում նկատենք, որ այնպիսի շարժում է, որի արդյունքում որոշ կետեր (a ուղղի կետերը) փոխադրվում են իրենք իրենց, այսինքն՝ մնում են չտեղաշարժված:

Զուգահեռ տեղափոխություն

Այժմ դիտարկենք շարժման մեկ այլ օրինակ, որի դեպքում արդեն չտեղաշարժվող կետեր չեն լինում, կամ էլ չտեղաշարժված են մնում տարածության բոլոր կետերը:

Դիցուք՝ տրված է որևէ $\vec{a}$ վեկտոր: Պատկերացնենք, որ տարածության յուրաքանչյուր M կետը հարաբերակցվում է այնպիսի M_1 կետի հետ, որը M կետից տեղադրված $\vec{a}$ վեկտորի վերջնակետն է, այսինքն՝ որոշվում է $\overrightarrow{MM_1}=\vec{a}$ առնչությամբ (նկ. 101, ա): Տարածության այդպիսի արտապատկերումը կոչվում է *զուգահեռ տեղափոխություն.* այդ դեպքում կասենք, որ տարածության յուրաքանչյուր M կետը $\vec{a}$ վեկտորով փոխադրվում է M_1 կետին: Ցույց տանք, որ զուգահեռ տեղափոխությունը շարժում է, այսինքն՝ տարածության՝ ըստ զուգահեռ տեղափոխության արտապատկերման դեպքում կետերի միջև հեռավորությունները մնում են անփոփոխ:



Նկ. 101

Դիցուք՝ կամայական երկու՝ A և B կետերը $\vec a$ վեկտորով փոխադրվում են համապատասխանաբար A_1 և B_1 կետերին, այսինքն՝ $\overrightarrow{AA_1}=\vec a$ և $\overrightarrow{BB_1}=\vec a$։ Ցույց տանք, որ այդ դեպքում AB և A_1B_1 հեռավորությունները միմյանց հավասար են (նկ. 101, բ)։ Իսկապես, օգտվելով վեկտորների գումարման կանոնից, ստանում ենք $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$ և $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$, ուրեմն՝ $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$ ։

Նկատի ունենալով, որ $\overrightarrow{AA_1}=\vec a$ և $\overrightarrow{BB_1}=\vec a$, հանգում ենք $\vec a+\overrightarrow{A_1B_1}=\vec a+\overrightarrow{AB}$ հավասարությանը, որից էլ ստանում ենք $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$ հավասարությունը։ Եվ քանի որ հավասար վեկտորների մոդուլները հավասար են, ուրեմն՝ $A_1B_1=AB$, ինչը և պահանջվում էր ցույց տալ։

Նկատենք, որ եթե $\vec a$ վեկտորը ոչ զրոյական է ($\vec a\neq\vec 0$), ապա տարածության ցանկացած M կետի համար կարող ենք պնդել, որ այն $\vec a$ վեկտորով ինքն իր վրա չի փոխադրվում ($\overrightarrow{MM_1}\neq\vec 0$ պայմանից բխում է, որ M և M_1 կետերը չեն համընկնում)։ Իսկ եթե $\vec a$ վեկտորը զրոյական է ($\vec a=\vec 0$), ապա $\vec a$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխությունը ներկայացնում է տարածության այնպիսի արտապատկերում, երբ յուրաքանչյուր կետ հարաբերակցվում է ինքն իր հետ։ Այդպիսի արտապատկերումը կոչվում է *նույնական արտապատկերում*. այդ դեպքում նաև ասում են, որ շարժումը *նույնական արտապատկերում է*։ Նկատենք, որ դա նույնն է, ինչ 0^o անկյունով պտույտը։

Պարզաբանում

Ընդհանրացնելով դիտարկված շարժումների օրինակները՝ տեսնում ենք, որ կարող են լինել հետևյալ տեսակի շարժումներ՝

ա) շարժումն ունի չտեղաշարժվող մեկ կետ (կենտրոնային համաչափությունը),
բ) շարժումն ունի չտեղաշարժվող կետեր, որոնցով կազմվում է ուղիղ (պտույտը, մասնավորապես՝ առանցքային համաչափությունը),
գ) շարժումն ունի չտեղաշարժվող կետեր, որոնցով կազմվում է հարթություն (հայելային համաչափությունը),
դ) շարժումը տեղաշարժվող կետ չունի (նույնական շարժումը),
ե) շարժումը չտեղաշարժվող կետեր չունի (զուգահեռ տեղափոխությունը)։

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

275. Պատկերեք AD և BC հիմքերով սեղան և սրունքները շարունակեք մինչև E կետում հատվելը: E կետից տարեք սեղանի հիմքերը հատող ճառագայթներ: Այդ ձևով AD և BC հատվածներից մեկի յուրաքանչյուր կետը հարաբերակցվում է մյուսի մի որոշակի կետի հետ: Համանման ձևով փոխմիարժեք հարաբերակցություն ստեղծեք հատած բուրգի երկու հիմքերի կետերի միջև:

276. Պատկերեք նույն O կենտրոնն ունեցող երկու շրջանագծեր, և O կետից տարեք ճառագայթներ: Այդ ձևով շրջանագծերից մեկի յուրաքանչյուր կետը հարաբերակցվում է մյուսի մի որոշակի կետի հետ: Համանման ձևով փոխմիարժեք հարաբերակցություն ստեղծեք համակենտրոն երկու գնդային մակերևույթների կետերի միջև:

277. Արդյոք ճշմարի՞տ է հետևյալ պնդումը.

ա) եթե F_1 պատկերի ամեն մի կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի մի որևէ կետի հետ, ապա F_2-ը F_1 պատկերի արտապատկերն է,

բ) յուրաքանչյուր արտապատկերման դեպքում տարածության տարբեր կետերը հարաբերակցվում են տարբեր կետերի հետ,

գ) շարժման դեպքում տարածության ցանկացած երկու կետերը հարաբերակցվում են այդ կետերի հեռավորությունն ունեցող երկու կետերի հետ,

դ) շարժումը տարածության այնպիսի արտապատկերում է, որի դեպքում յուրաքանչյուր կետը փոխադրվում է մի ուրիշ կետի:

278. Գտեք այն կետերի կոորդինատները, որոնց փոխադրվում են $A(1, 2, 3)$ և $B(-1, 0, -2)$ կետերը կենտրոնային համաչափության դեպքում, եթե համաչափության կենտրոնի կոորդինատներն են՝

ա) $O(0, 0, 0)$, **բ)** $M(0, 0, 1)$, **գ)** $P(1, -2, 0)$:

279. Ցույց տվեք, որ՝ **ա)** առանցքային համաչափությունը և **բ)** հայելային համաչափությունը շարժում են:

Լուծում. **ա)** Դիցուք՝ a-ն համաչափության առանցքն է, և տարածության տվյալ արտապատկերման դեպքում յուրաքանչյուր կետ փոխադրվում է a ուղղի նկատմամբ իրեն համաչափ կետին: Վերցնենք կամայական A և B կետեր, որոնք փոխադրվում են համապատասխանաբար A_1 և B_1 կետերին: Ցույց տանք, որ AB և A_1B_1 հեռավորությունները միմյանց հավասար են:

Դրա համար տարածության մեջ ներմուծենք կոորդինատների $Oxyz$ համակարգն այնպես, որ a առանցքը համընկնի կոորդինատային, ասենք, Oz առանցքի հետ: Այդ համակարգում A և B կետերի կոորդինատները նշանակենք՝ $A(x_1, y_1, z_1)$ և $B(x_2, y_2, z_2)$: Որպես A և B կետերին Oz առանցքի նկատմամբ համաչափ կետեր՝ A_1 և B_1 կետերը կունենան $A_1(-x_1, -y_1, z_1)$ և $B_1(-x_2, -y_2, z_2)$ կոորդինատները (տե՛ս 9.2 կետը): Օգտվելով երկու կետերի հեռավորության հաշվման բանաձևից, ստացվում է.

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(z_2-z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = AB$$, ինչը և պահանջվում էր ցույց տալ.

բ) դեպքը լուծվում է համանման ձևով (լուծեք ինքնուրույն):

280. Գտեք, թե շարժման արդյունքում ո՞ր կետերին են փոխադրվում $A(0, -1, 1)$ և $B(2, 2, -2)$ կետերը՝ **ա)** Oy առանցքի նկատմամբ համաչափության դեպքում, **բ)** Oxz հարթության նկատմամբ հայելային համաչափության դեպքում:

281. Պարզեք, թե կոորդինատային ո՞ր հարթության նկատմամբ է համաչափությունը, եթե այդ շարժման արդյունքում $M(2, 3, 4)$ կետը փոխադրվել է՝ **ա)** $M_1(2, -3, 4)$ կետին, **բ)** $M_2(2, 3, -4)$ կետին:

282. Գտեք այն կետի կոորդինատները, որին փոխադրվում է $A(1, -2, 3)$ կետը հետևյալ երկու շարժումների արդյունքում՝
ա) նախ համաչափություն Ox առանցքի նկատմամբ, ապա համաչափություն կոորդինատային O սկզբնակետի նկատմամբ,
բ) նախ համաչափություն Oxy հարթության նկատմամբ, ապա համաչափություն Oyz հարթության նկատմամբ,
գ) նախ համաչափություն Oxz հարթության նկատմամբ, ապա համաչափություն Oz առանցքի նկատմամբ:

283. ABC ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյունը նրա հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ համաչափության արդյունքում փոխադրվում է ինչ-որ F պատկերի: Ի՞նչ կարող եք ասել F պատկերի մասին:

284. Նկարով պատկերեք խորանարդ և այն պատկերը, որին փոխադրվում է այդ խորանարդը՝ **ա)** նիստերից մեկով անցնող հարթության նկատմամբ հայելային համաչափության դեպքում, **բ)** կողերից մեկով անցնող ուղղի նկատմամբ առանցքային համաչափության դեպքում, **գ)** գագաթներից մեկի նկատմամբ կենտրոնային համաչափության դեպքում:

285. Պարզեք, թե ինչ պատկերի է փոխադրվում կոորդինատային Ox առանցքը՝ **ա)** Oz առանցքի շուրջը ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ 90° պտույտի դեպքում, **բ)** Oz առանցքի շուրջը ժամսլաքի ուղղությամբ 180° պտույտի դեպքում, **գ)** Oy առանցքի շուրջը ժամսլաքի ուղղությամբ 90° պտույտի դեպքում, **դ)** Ox առանցքի շուրջը ժամսլաքի ուղղությամբ 45°

պտույտի դեպքում, **ե)** Oz առանցքի շուրջը ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ 45^{o} պտույտի դեպքում:

286. Գտեք այն կետի կոորդինատները, որին փոխադրվում է $A(2, 0, 0)$ կետը Oz առանցքի շուրջը ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ φ անկյամբ պտույտի դեպքում, եթե՝ **ա)** $\varphi=90^{o}$, **բ)** $\varphi=45^{o}$, **գ)** $\varphi=60^{o}$, **դ)** $\varphi=135^{o}$:

287. M կետը տրված $ABCD$ քառակուսու անկյունագծերի հատման կետն է, իսկ M կետով անցնող a ուղիղն ուղղահայաց է այդ քառակուսու հարթությանը: Նկարով պատկերեք $ABCD$ քառակուսին և այն պատկերը, որին փոխադրվում է այդ քառակուսին a առանցքի շուրջը φ անկյամբ պտույտի դեպքում, եթե՝ **ա)** $\varphi=90^{o}$, **բ)** $\varphi=180^{o}$, **գ)** $\varphi=45^{o}$:

288. M կետը ABC հավասարակողմ եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: a ուղիղն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է այդ եռանկյան հարթությանը: Ցույց տվեք, որ a առանցքի շուրջը 120^{o}-ով պտույտի դեպքում ABC եռանկյունն արտապատկերվում է ինքն իր վրա:

289. a ուղիղն անցնում է տրված խորանարդի երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով: Դիտարկվում է φ անկյամբ պտույտ a առանցքի շուրջը: Նշեք φ անկյան այնպիսի արժեքներ, որոնց դեպքում այդ խորանարդն արտապատկերվում է ինքն իր վրա:

290. Գտեք այն կետերի կոորդինատները, որոնց փոխադրվում են $A(0, 1, -1)$, $B(2, 0, 3)$ և $C(-2, 1, 1)$ կետերը $\vec{p}\{1, 1, 1\}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման արդյունքում:

291. Նկարով պատկերեք որևէ a ուղիղ և այն ուղիղը, որին փոխադրվում է a ուղիղը $\vec{p}\neq\vec{0}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման դեպքում՝ դիտարկելով հետևյալ դեպքերը՝ **ա)** $\vec{p}$ վեկտորն ընկած չէ a ուղղի վրա և նրան զուգահեռ չէ, **բ)** $\vec{p}$ վեկտորն ընկած է a ուղղի վրա, **գ)** $\vec{p}$ վեկտորը զուգահեռ է a ուղղին:

292. Հայտնի է, որ ոչ զրոյական վեկտորով զուգահեռ տեղափոխման արդյունքում տրված F պատկերն արտապատկերվել է ինքն իր վրա: Կարո՞ղ է այդպիսի F պատկերը լինել՝ **ա)** հատվածը, **բ)** եռանկյունը, **գ)** ուղիղը, **դ)** ճառագայթը, **ե)** գունդը, **զ)** կիսահարթությունը, **է)** երկնիստ անկյունը:

293. Գտեք այն կետի կոորդինատները, որին փոխադրվում է $A(1, 0, 2)$ կետը հետևյալ շարժումների վերջնարդյունքում՝ **ա)** նախ զուգահեռ տեղափոխություն $\vec{a}\{-1, 1, -1\}$ վեկտորով, հետո համաչափություն Oxy հարթության նկատմամբ, **բ)** նախ համաչափություն O սկզբնակետի նկատմամբ, հետո զուգահեռ տեղափոխություն $\vec{a}\{-1, 1, -1\}$ վեկտորով:

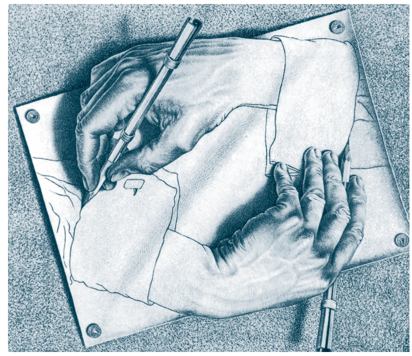
294. Նախորդ խնդրում ներկայացված ա) և բ) դեպքերից յուրաքանչյուրի համար պարզեք, թե վերջնարդյունքն արդյոք կախվա՞ծ է տրված երկու շարժումների հերթականությունից:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Ձեզ արդեն ծանոթ են հետևյալ շարժումները. համաչափությունները՝ կետի, առանցքի, հարթության նկատմամբ, զուգահեռ տեղափոխությունը և պտույտը:**

ա) **Փորձեք պարզել, թե այդ շարժումներից որևէ մեկով կարո՞ղ է արդյոք նկար 102-ում պատկերված ձեռքերից մեկը արտապատկերվել մյուսի վրա:**

բ) **Պատկերացրեք, որ շարժման արդյունքում կարող է փոխադրվել նկարում պատկերված ձեռքերից միայն մեկը (մյուս ձեռքը մնում է նույն դիրքով): Ինչպիսի՞ հաջորդական շարժումների արդյունքում մի ձեռքը կարող է արտապատկերվել չտեղաշարժված մյուս ձեռքի վրա:**

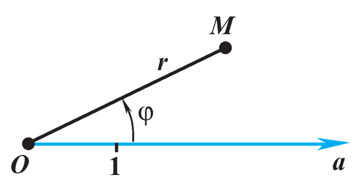


Նկ. 102

Նշենք, որ այդ նկարը ձեզ արդեն ծանոթ Մորիս Էշերի գործերից է: Նա այդ նկարն անվանել է «Նկարող ձեռքեր»: Իսկ ի՞նչ անվանում կընտրեք դուք այդ նկարի համար:

2. Ուսումնասիրեք հետևյալ տեքստը

Կետերի դիրքերը նշելու համար պարտադիր չէ անպայման ներմուծել ուղղանկյուն կոորդինատների համակարգ: Օրինակ, արշավների ժամանակ նպատակակետի տեղը ցույց տալու համար հաճախ նշվում է նրա հեռավորությունը և ուղղությունը: Հենց այդ գաղափարն էլ ընկած է *բևեռային կոորդինատների* տրման հիմքում: Որպեսզի այն ներմուծենք՝ հարթության վրա վերցնենք որևէ O կետ (այն կոչվում է *բևեռ*), տանենք այդ սկզբնակետով a ճառագայթը (*բևեռային ճառագայթը*) և դրա վրա նշենք հատվածների չափման միավորը (նկ. 103): Հարթության կամայական M կետի դիրքը միարժեքորեն կորոշվի, եթե տրվեն նրա r հեռավորությունն O կետից ($r=OM$) և OM ճառագայթի ու բևեռային a ճառագայթի կազմած φ անկյունը (անկյան նշանն ու ընդունած արժեքների բազմությունը սահմանվում են այնպես, ինչպես «Հանրահաշիվ և մաթանալիզի տարրեր» դասընթացում):



Նկ. 103

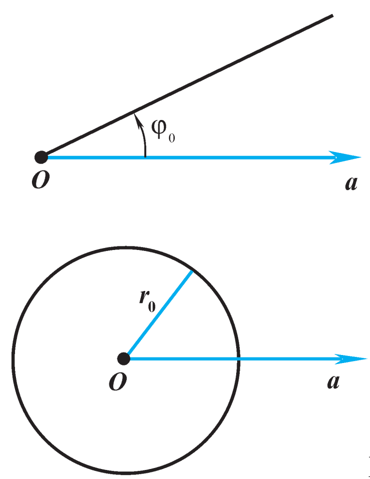
Այսպիսով, հարթության կամայական M կետին համադրվում է (r , φ) թվազույգ. այդ թվերը կոչվում են *բևեռային կոորդինատներ*: Այդպիսի կոորդինատներից օգտվելը հարմար է հատկապես այն դեպքերում, երբ դիտարկվում են մարմինների շարժումները որևէ կենտրոնի շուրջը (օրինակ՝ մոլորակի շարժումը Արեգակի շուրջը): Նշենք, որ տարածության մեջ ներմուծվում են նաև գնդոլորտային և այլ կոորդինատների համակարգեր, որոնց մենք չենք անդրադառնա:

Դիտարկենք մեկ-երկու օրինակներ՝ պատկերացում ունենալու համար, թե բևեռային կոորդինատներով արտահայտելիս ի՞նչ տեսք ունեն հարթության վրա տրված պատկերների հավասարումները:

1. Հարթության բոլոր այն կետերը, որոնց համար φ անկյունը տրված հաստատուն մեծություն է ($\varphi=\varphi_0$), իսկ r-ը փոփոխվելով կարող է ընդունել ցանկացած արժեքներ, կազմում են *O* սկզբնակետով ճառագայթ (նկ. 104, ա): Օրինակ՝ $\varphi=\frac{\pi}{6}$ հավասարումով տրվում է բևեռային առանցքի հետ 30° կազմող ճառագայթը:

2. Հարթության բոլոր այն կետերը, որոնց համար *r* -ը տրված հաստատուն մեծություն է ($r=r_0$), իսկ φ անկյունը փոփոխվելով կարող է ընդունել ցանկացած արժեքներ, կազմում են *O* կենտրոնով շրջանագիծ (նկ. 104, բ): Օրինակ՝ $r=1$ հավասարումով տրվում է *O* կենտրոնով միավոր շրջանագիծը: Նկատենք, որ այն դեպքում, երբ φ-ն ընդունում է $0 \le \varphi < 2\pi$ արժեքներ, առաջանում է շրջանային աղեղ, իսկ երբ ընդունում է $[0,+\infty)$ միջակայքի արժեքները, ապա դարձյալ առաջանում է շրջանագիծ (մեկ լրիվ պտույտից հետո կետերի դիրքերը պարբերաբար կրկնվում են):

3. Ուշագրավ պատկեր է ստացվում $r=\varphi$ հավասարումով (φ-ն արտահայտվում է ռադիաններով): Այս դեպքում φ անկյան մեծանալուն զուգընթաց մեծանում է նաև կետի հեռավորությունը O բևեռից: Նկար 105-ում ներկայացված է այդ պատկերը, որը կրում է *արքիմեդյան պարուրագիծ* անվանումը՝ ի պատիվ Արքիմեդի, ով առաջինն է հայտնաբերել ու հետազոտել այդ պատկերը:

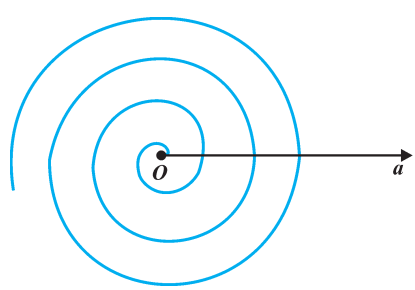


Նկ. 104

Արքիմեդյան պարուրագիծն օժտված է հիանալի հատկությամբ. պտույտների ընթացքում գալարները մեծանում են, սակայն հարևան գալարների հեռավորությունը մնում է անփոփոխ: Դրանում համոզվելու համար *O* կետից տարեք կամայական ճառագայթ և կտեսնեք, որ այդ ճառագայթի և գալարների հատման կետերը հաջորդաբար ունեն միմյանցից 2π-ական հեռավորություններ:

Նաև նշենք, որ արքիմեդյան պարուրագծի հավասարումն ընդհանուր դեպքում ունի $r=k\varphi$ տեսքը, որտեղ k-ն գործակից է: Այն բազմաթիվ կիրառություններ ունի գիտության և տեխնիկայի տարբեր բնագավառներում:

Նկարագրեք արքիմեդյան պարուրագծի մոդելներ ներկայացնող առօրեական օրինակներ:

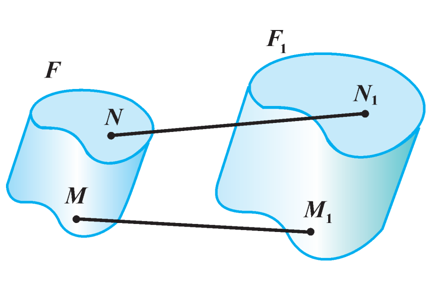


Նկ. 105

§ 11 ԳԱՂԱՓԱՐ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

11.1. Ի՞նչ է նմանությունը

Առօրյայում հաճախ ենք հանդիպում այնպիսի առարկաների, որոնք ունեն միևնույն ձևը, բայց նրանց չափսերը տարբեր են: Օրինակ, գործարաններում պատրաստվում են մեքենաներ, նավեր, ինքնաթիռներ, իսկ խանութներում վաճառվում են այնպիսի խաղալիքներ (ամբողջական կամ հավաքովի), որոնք դրանց մանրատիպարներն են: Ձևը պահպանելով՝ չափսերը փոփոխելու հնարը լայն տարածում ունի նաև քանդակագործության և ճարտարապետության մեջ: Այսպես, ճարտարապետական համալիրներ նախագծելուց հետո, նախքան շինարարական աշխատանքներն սկսելը, պատրաստվում են շինությունների փոքրացված նախատիպարները (մակետները): Այդպիսի իրադրություններում տիպարի և բնօրինակի միանմանությունն ապահովվում է այն բանի շնորհիվ, որ պահպանվում են դրանց բոլոր բաղադրիչների չափսերի համամասնությունները: Օրինակ, շինությունը կառուցվում է այնպես, որ նրա ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը նույնքան անգամ մեծ լինի նախատիպարի համապատասխան կետերի հեռավորությունից: Չափսերի այդպիսի միատեսակ համամասնություններ ունեցող պատկերները կոչվում են *նման պատկերներ*: Իսկ այն թիվը, որը ցույց է տալիս, թե այդ պատկերներից մեկի կետերի հեռավորությունները քանի անգամ են մեծ մյուսի համապատասխան կետերի հեռավորություններից, կոչվում է *նմանության գործակից*: Օրինակ, հավաքովի խաղալիք-ինքնաթիռի տուփերի վրա սովորաբար նշվում է, որ խաղալիքի մանրակները բնականի համեմատությամբ ունեն, ասենք, 1:100 մեծություն: Դա հենց նշանակում է, որ տվյալ դեպքում նմանության գործակիցը 0,01 է: Մեկ այլ, ավելի ծանոթ օրինակ է քարտեզը, որի մասշտաբը տարածքի համեմատությամբ նրա նմանության գործակիցն է:



Նկ. 106

Ավելի հստակեցնենք պատկերների նմանության հետ կապված հասկացությունները:

Տարածության՝ $k>0$ գործակցով նմանության արտապատկերում կոչվում է այն արտապատկերումը, որի դեպքում ցանկացած երկու M և N կետերին համապատասխանեցվում են այնպիսի M_1 և N_1 կետեր, որ $M_1N_1 = k \cdot MN$ (նկ. 106):

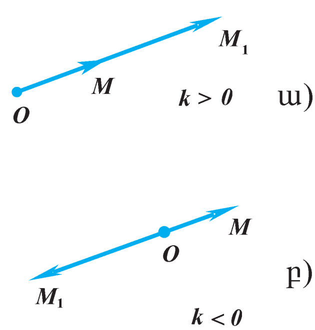
F_1 պատկերը կոչվում է F պատկերին նման, եթե գոյություն ունի որևէ k գործակցով նմանության այնպիսի արտապատկերում, որի դեպքում F պատկերը փոխադրվում է F_1 պատկերին (F պատկերի կետերը փոխադրվում են F_1 պատկերի կետերին):

Նկատենք, որ ի տարբերություն շարժման, որի դեպքում պահպանվում են պատկերի չափսերը և, ուրեմն, նաև ձևը, նմանության արտապատկերման դեպքում պատկերի չափսերը փոխվում են, սակայն ձևը պահպանվում է: Ընդ որում՝ ձևը պահպանվում է այն բանի շնորհիվ, որ չափսերը փոխվում են համամասնորեն (բոլոր կետերի միջև հեռավորությունները փոխվում են միատեսակ ձևով՝ մեծանում կամ փոքրանում են նույնքան անգամ): Մասնավոր դեպքում, երբ նմանության գործակիցը 1 է՝ k=1, պահպանվում են նաև կետերի միջև հեռավորությունները: Այսինքն՝ *k=1 դեպքում նմանության արտապատկերումը ներկայացնում է շարժում*: Նմանօրինակ առնչություն մեզ ծանոթ է նաև հարթաչափությունից: Հիշենք, որ եռանկյունների նմանությունը դիտարկելիս նշել ենք, որ եթե նմանության գործակիցը 1 է՝ k=1, ապա նման եռանկյունները միմյանց հավասար են: Այսինքն՝ եռանկյունների հավասարությունը կարող է դիտվել որպես եռանկյունների նմանության մասնավոր դեպք: Համանման ձևով՝ շարժումը կարող է դիտվել որպես նմանության արտապատկերման մասնավոր դեպք:

11.2. Գաղափար նմանադրումի մասին

Այժմ դիտարկենք նմանության արտապատկերման լայն տարածում ունեցող մի տեսակ, որը կրում է *նմանադրում* անվանումը:

Դիցուք՝ տրված է որևէ O կետ և կամայական $k \neq 0$ թիվ (k-ն կարող է լինել նաև բացասական): O կենտրոնով և k գործակցով նմանադրում կոչվում է տարածության այն արտապատկերումը, որի դեպքում ցանկացած M կետ համապատասխանեցվում է այնպիսի M_1 կետի հետ, որ $\vec{OM_1} = k \cdot \vec{OM}$ (նկ. 107): Դժվար չէ համոզվել, որ մասնավոր՝ $k = -1$ դեպքում նմանադրումը ներկայացնում է կենտրոնային համաչափություն (նկ. 108), իսկ $k = 1$ դեպքում՝ նույնական արտապատկերում:



Նկ. 107

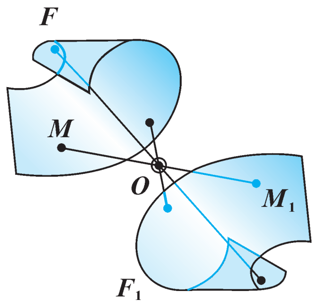
Ցույց տանք, որ O կենտրոնով և $k \neq 0$ գործակցով նմանադրումն այնպիսի արտապատկերում է, որի դեպքում կետերի միջև հեռավորությունները փոխվում են համամասնորեն, այսինքն՝ ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը մեծանում է միևնույն գործակցով:

Դիցուք՝ նմանադրման արդյունքում կամայական երկու՝ A և B կետեր փոխադրվել են A_1 և B_1 կետերին (նկ. 109): Այդ դեպքում, ըստ նմանադրման սահմանման, $\vec{OA_1} = k\cdot\vec{OA}$, $\vec{OB_1} = k\cdot\vec{OB}$: Օգտվելով վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների հատկություններից՝ կստանանք՝

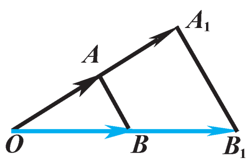
$\vec{A_1B_1} = \vec{OB_1} - \vec{OA_1} = k\cdot\vec{OB} - k\cdot\vec{OA} =$
$= k\,(\vec{OB} - \vec{OA}) = k\cdot\vec{AB}$:

Այս հավասարությունից հետևում է, որ $|\vec{A_1B_1}| = |k\cdot\vec{AB}|$, այսինքն՝ $A_1B_1 = |k|\cdot AB$:

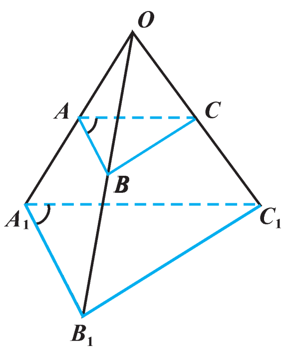
Այսպիսով, կարող ենք եզրակացնել, որ $k \neq 0$ գործակցով նմանադրումը $|k|$ գործակցով նմանության արտապատկերում է:



Նկ. 108



Նկ. 109



Նկ. 110

Պարզաբանում

Պարզվում է, որ նմանադրման դեպքում հատվածը փոխադրվում է հատվածի, ուղիղը՝ ուղղի, ճառագայթը՝ ճառագայթի, հարթությունը՝ հարթության, կիսահարթությունը՝ կիսահարթության, անկյունը՝ անկյան և առհասարակ ցանկացած պատկեր՝ նույնանուն պատկերի: Ավելին, ցույց է տրվում, որ նմանադրման դեպքում անկյունների հավասարությունը պահպանվում է: Նկար 110-ում պատկերված են ABC եռանկյունը և նմանադրումով ստացված $A_1B_1C_1$ եռանկյունը: Դժվար չէ ցույց տալ, որ այդ եռանկյունները նման են և, ուրեմն, համապատասխան անկյունները հավասար են:

Նմանադրման դեպքում անկյունների հավասարության պահպանումից հետևում է, որ ուղիղների ու հարթությունների փոխդասավորությունները (զուգահեռություն, ուղղահայացություն և այլն) նույնպես պահպանվում են:

Նմանադրման կիրառության առօրեական օրինակները բազմաթիվ են: Այդպիսի կիրառության արդյունքներ են լուսանկարված պատկերները, ինչպես նաև դրանց ցուցադրումները էկրանների վրա: Նմանադրումը կարևոր կիրառություն ունի երկրաչափության մեջ. պարզվում է, որ ըստ նմանության յուրաքանչյուր արտապատկերում կարելի է արտահայտել հաջորդաբար կատարվող նմանադրման և շարժման միջոցով:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

295. Ի՞նչ պայմանների առկայության դեպքում կարող ենք ասել, որ տրված երկու եռանկյունները նման են (ձևակերպեք եռանկյունների նմանության հայտանիշները):

296. Պատկերեք ABC եռանկյուն և տարեք AC կողմին զուգահեռ MN միջին գիծը: Արդյոք նմա՞ն են MBN և ABC եռանկյունները: Եթե այո, ապա ինչի՞ է հավասար նմանության գործակիցը: Ի՞նչ եղանակով ստեղծել փոխմիարժեք հարաբերակցություն այդ եռանկյունների (ներառյալ ներքին տիրույթները) կետերի միջև:

297. Պատկերեք որևէ կոն և հիմքին զուգահեռ հարթությամբ տրոհելով՝ ստացեք երկրորդ կոնը, որը սկզբնական կոնի մի մասն է: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ ստացված և սկզբնական կոները նման են: Ինչպե՞ս որոշել նմանության գործակիցը: Ի՞նչ եղանակով ստեղծել փոխմիարժեք հարաբերակցություն այդ երկու կոների կետերի միջև:

298. Կարո՞ղ ենք պնդել, որ ցանկացած երկու գնդեր նման են: Ինչպե՞ս է որոշվում դրանց նմանության գործակիցը:

299. Պատկերեք $ABCD$ ուղղանկյուն և կառուցեք այն պատկերը, որին փոխադրվում է այդ ուղղանկյունը A կենտրոնով և k գործակցով նմանադրման արդյունքում, եթե՝ **ա)** $k = 0{,}5$, **բ)** $k = –1$, **գ)** $k = –2$:

300. Պատկերեք ABC հավասարակողմ եռանկյուն և նշեք նրա միջնագծերի հատման M կետը: Նախ կառուցեք այն պատկերը, որին փոխադրվում է այդ եռանկյունը M կենտրոնով և $k = 2$ գործակցով նմանադրման արդյունքում: Այնուհետև կառուցեք ստացված պատկերի՝ M կետի նկատմամբ համաչափ պատկերը:

301. Կինոժապավենի վրա 4 սմ^2 մակերես ունեցող նկարը դահլիճի էկրանի վրա զբաղեցնում է 9 մ^2 մակերես: Գտեք նմանության գործակիցը և պարզեք, թե տվյալ դեպքում նմանադրումը դրակա՞ն, թե՞ բացասական գործակցով է:

302*. Ցույց տվեք, որ $k = –1$ գործակցով նմանադրումը կենտրոնային համաչափություն է:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Պատկերացրեք, որ սեղանի վրա դրված են չափսերով տարբեր երկու գնդեր: Գործնականում ինչպե՞ս կորոշեք այն նմանադրման գործակիցն ու կենտրոնը, որով այդպիսի դասավորություն ունեցող գնդերից մեկն արտապատկերվում է մյուսի վրա:**

2. **Վերընթերցեք 11.2 կետի տեքստը և դուրս գրեք այն բառերը, որոնց իմաստն, ըստ ձեզ, անհասկանալի կլիներ, եթե այդ տեքստն ընթերցեիք ուսումնական տարվա սկզբին:**

Լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ Գլուխ III-ի վերաբերյալ

303. Գտեք այն կետերի կոորդինատները, որոնք $A(3, 1, 2)$, $B(-1, 3, 0)$ և $C(0, 2, 0)$ կետերի պրոյեկցիաներն են՝ **ա)** Oxy հարթության վրա, **բ)** Oxz հարթության վրա, **գ)** Oyz հարթության վրա:

304. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդը կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում տեղադրված է այնպես, որ կոորդինատների սկզբնակետն ընկած է $ABCD$ ստորին հիմքի կենտրոնում, իսկ կողերը համապատասխանաբար զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին: A գագաթն ունի $(-1, 1, 0)$ կոորդինատները: Գտեք խորանարդի մյուս գագաթների կոորդինատները:

305. Բազմահարկ շենքն ունի 10 մ x 20 մ x 21 մ չափսերով ուղղանկյունանիստի տեսք, յուրաքանչյուր հարկը բաժանված է 3 մ բարձրություն և 100 մ^2 մակերեսով քառակուսաձև հատակ ունեցող երկու բնակարանի (պատերի և միջնահարկերի հաստությունները ներառված են): Կոորդինատային համակարգը ներմուծված է այնպես, որ շենքի հատակն ընկած է Oxy հարթության, փոքր պատը՝ Oxz հարթության, մեծ պատը՝ Oyz հարթության մեջ՝ յուրաքանչյուրը դրական կիսառանցքների կողմում: Բնակարանների 1-ից 14 համարակալումը սկսվում է ներքևից՝ ձախից դեպի աջ: Որոշեք այն բնակարանի համարը, որում ընկած է հետևյալ կետը՝ **ա)** $A(7, 11, 1)$, **բ)** $B(3, 12, 8)$, **գ)** $C(8, 1, 20)$, **դ)** $D(\sqrt{17}, 8\sqrt{2}, 9{,}2)$:

306. Նախորդ խնդրի տվյալների հիման վրա, ինչպես նաև հաշվի առնելով, որ միջնահարկի հաստությունը ներառվում է ներքևի հարկի չափսերի մեջ, գտեք՝ **ա)** 1-ին հարկի ութ ծայրակետերի (ուղղանկյունանիստի գագաթների) կոորդինատները, **բ)** 11-րդ բնակարանի հատակի չորս ծայրակետերի կոորդինատները, **գ)** 8-րդ բնակարանի կենտրոնի (անկյունագծերի հատման կետի) կոորդինատները, **դ)** 5-րդ և 10-րդ բնակարանների հատակների կենտրոնների հեռավորությունը:

307. A կետի աբսցիսը 1 է: Գտեք նրա մյուս կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ՝ **ա)** A-ն բոլոր կոորդինատային հարթություններից հավասարահեռ է, **բ)** A-ն բոլոր կոորդինատային առանցքներից հավասարահեռ է,

գ) A-ն Oy առանցքից ունի այնքան հեռավորություն, ինչքան Oyz հարթությունից:

308. Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն կետի կոորդինատները, որպեսզի այդ կետը հավասարահեռ լինի՝ **ա)** բոլոր կոորդինատային հարթություններից, **բ)** Oxy և Oyz կոորդինատային հարթություններից:

309. Վեկտորի մոդուլը 4 է: Գտեք նրա կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ դրանք միմյանց հավասար են:

310. Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի երկրորդ կոորդինատը 0 է: Ինչպե՞ս է դասավորված $\vec{a}$ վեկտորը՝ **ա)** Oy առանցքի նկատմամբ, **բ)** Oxz հարթության նկատմամբ, **գ)** Oxy հարթության նկատմամբ:

311. $\vec{e}$ վեկտորի մոդուլը հավասար է 2-ի: Կարո՞ղ է արդյոք $\vec{e}$ վեկտորի կոորդինատներից որևէ մեկը լինել՝ **ա)** 3, **բ)** 2, **գ)** –3:

312. Գտեք B կետի կոորդինատները, եթե տրված են $\overrightarrow{AB}\{4, -3, 0\}$ վեկտորի և $A(1, -3, -7)$ կետի կոորդինատները:

313. Տրված են $A(0, -2, 2)$ և $B(-4, 1, 2)$ կետերը: Գտեք՝ **ա)** $-\overrightarrow{AB}$ վեկտորի կոորդինատները, **բ)** $|3\overrightarrow{AB}|$-ն, **գ)** $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \vec{i}$ վեկտորի կոորդինատները, **դ)** $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \vec{j}$ վեկտորի վերածումն ըստ կոորդինատային վեկտորների, **ե)** $|\vec{q}|$-ն, որտեղ $\vec{q} = 2\overrightarrow{BA} - 5\vec{k}$:

314. Հաստատուն արագությամբ ուղղագիծ շարժվող կետը 2 միավոր ժամանակամիջոցում $A(7, 2, -4)$ կետից տեղափոխվել է $B(1, -4, -1)$ կետը: Գտեք այդ արագությունը:

315. Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն վեկտորի կոորդինատները, որպեսզի այդ վեկտորը լինի՝ **ա)** կոորդինատային Oxy հարթությանն ուղղահայաց, **բ)** կոորդինատային Oy առանցքին ուղղահայաց, **գ)** $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ վեկտորին համագիծ:

316. Տրված է $A(1, 2, 3)$ կետը, և հայտնի է, որ $\overrightarrow{AB}$-ն միավոր վեկտոր է: Ի՞նչ կոորդինատներ է ունենալու B կետը, որպեսզի $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը լինի՝ **ա)** կոորդինատային Oxz հարթությանն ուղղահայաց,
բ) կոորդինատային $\vec{k}$ վեկտորի հետ համագիծ:

317. Գտեք $3\vec{a}$ և $-\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե տրված են $\vec{a}\{0, 1, 5\}$ և $\vec{b}\{-3, 2, 4\}$ վեկտորները:

318. m-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ և $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - m\vec{k}$ վեկտորները կլինեն ուղղահայաց:

319. Գտեք հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը՝ **ա)** $\vec{a}\{1, -2, 4\}$ և $\vec{b}\{2, 3, 1\}$, **բ)** $\vec{a}\{-1, -2, 2\}$ և $\vec{b}\{-1, 0, 1\}$, **գ)** $\vec{a}\{-1, 1, 0\}$ և $\vec{j} + \vec{k}$:

320. Ի՞նչ անկյուն են կազմում $\vec{e}$ և $\vec{p}$ միավոր վեկտորները, եթե հայտնի է, որ $\vec{e} + 2\vec{p}$ և $5\vec{e} - 4\vec{p}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են:

321. M կետի պրոյեկցիան $ABCD$ քառակուսու հարթության վրա համընկնում է այդ քառակուսու կենտրոնի հետ: Ցույց տվեք, որ $\vec{BD}$ և $\vec{CM}$ վեկտորների կազմած անկյունը 90° է:

322*. Ապացուցեք, որ ուղղահայաց են այն երկու խաչվող ուղիղները, որոնցից մեկն ընդգրկում է խորանարդի անկյունագիծը, իսկ մյուսը՝ նիստի անկյունագիծը:

323. Պարզեք $A(1, 1, 4)$, $B(0, 1, 3)$ և $C(2, 1, 3)$ գագաթներով եռանկյան տեսակը:

324. Տրված են $A(-3, 1, 2)$, $B(1, 1, 0)$, $C(-4, 1, -1)$ և $D(2, -1, 3)$ կետերը: Գտեք AB և CD հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

325. Ապացուցեք, որ $A(2, 4, -4)$, $B(1, 1, -3)$, $C(-2, 0, 5)$, $D(-1, 3, 4)$ կետերը զուգահեռագծի գագաթներ են, և գտեք այդ զուգահեռագծի համաչափության կենտրոնի կոորդինատները:

326. Պարզեք, թե $A(3, 4, 5)$, $B(-1, 0, 5)$ և $C(2, -3, 5)$ կետերով անցնող հարթությունն ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունի կոորդինատային հարթություններից յուրաքանչյուրի նկատմամբ:

327. Կոորդինատային Oy առանցքի վրա գտեք այնպիսի C կետ, որը հավասարահեռ լինի տրված $A(-2, 3, 5)$ և $B(3, 2, -3)$ կետերից:

328. Տրված են $A(2, 3, 6)$, $B(2, 0, 1)$ և $C(3, 2, 2)$ կետերը: Գտեք ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները:

329. Գնդային մակերևույթն անցնում է $A(1, 3, 4)$, $B(4, -4, 0)$, $C(-3, 0, 3)$ և $D(-2, 0, 4)$ կետերով: Գտեք այդ գնդային մակերևույթի շառավիղն ու կենտրոնի կոորդինատները:

330. $M(3, -6, 5)$ և $N(7, 6, 2)$ կետերն ընկած են գնդային մակերևույթի վրա և համաչափ են նրա կենտրոնի նկատմամբ: Գտեք այդ գնդային մակերևույթի հավասարումը: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն կոորդինատների սկզբնակետն ու այդ գնդային մակերևույթը:

331*. $A(5, 3, 0)$, $B(1, 5,0)$ և $C(-3, 3, 0)$ կետերն ընկած են գլանի ստորին հիմքի շրջանագծի վրա, իսկ $D(2, 3, 4)$ կետը՝ վերին հիմքի վրա: Գտեք գլանի հիմքերի շրջանների կենտրոնների կոորդինատները:

332. Ի՞նչ պատկեր է ներկայացնում այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ համակարգին.

ա) $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 + z^2 \le 9 \\ z = 0 \end{cases}$, **բ)** $\begin{cases} x = 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ z = 0 \end{cases}$, **գ)** $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$,

դ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$, **ե)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$:

333*. $4\sqrt{3}$ կող ունեցող *SABC* կանոնական քառանիստը կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգում տեղադրված է այնպես, որ կոորդինատների սկզբնակետն ընկած է հիմքի *ABC* եռանկյան միջնագծերի հատման կետում, *A* գագաթը՝ *Oy* առանցքի վրա՝ $A(0,\ -4,\ 0)$ կետում, իսկ *B* գագաթն ունի $(2\sqrt{3}, 2, 0)$ կոորդինատները: Գտեք *C* և *S* գագաթների կոորդինատները: Պարզեք, թե խնդրում արդյոք կա՞ն «ավելորդ» տվյալներ (առանց որոնց խնդիրը նույնպես կլուծվեր):

334. Ի՞նչ վեկտորով պետք է կատարել զուգահեռ տեղափոխությունը, որպեսզի՝ **ա)** $E(1,\ 2,\ 3)$ կետը փոխադրվի $F(3,\ 2,\ 1)$ կետին, **բ)** $M(2,\ 0,\ 0)$ կետը փոխադրվի $N(0,\ 0,\ 2)$ կետին:

335. *Ox* առանցքի շուրջը պտույտի արդյունքում $A(0, \sqrt{3}\ ,\ 1)$ կետը փոխադրվել է $B(0,\ 1,\ \sqrt{3}\ )$ կետին: Գտեք պտույտի անկյունը: Այդ պտույտի արդյունքում ի՞նչ կոորդինատներով կետի կփոխադրվի $B(0,\ 1,\ \sqrt{3}\ )$ կետը:

336. *a*-ն և *b*-ն *M* կետում հատվող ուղիղներ են: Ինչպիսի՞ շարժումների դեպքում է *a* ուղիղն արտապատկերվում b ուղղի վրա այնպես, որ *M* կետը մնում է անշարժ:

337. Գտեք այն մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է 6 և 8 էջերով ուղղանկյուն եռանկյան մեծ էջի շուրջը φ անկյամբ պտույտի ընթացքում, եթե տրված է, որ՝ **ա)** $\varphi = 90^o$, **բ)** $\varphi = 60^o$, **գ)** $\varphi = 135^o$, **դ)** $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$:

338. Պարզեք, թե արդյոք նմա՞ն են ցանկացած երկու՝ **ա)** հատվածները, **բ)** քառակուսիները, **գ)** շեղանկյունները, **դ)** շրջանները, **ե)** կանոնավոր քառանկյուն բուրգերը, **զ)** կանոնական քառանիստերը, **է)** նույն կոնի հիմքին զուգահեռ հարթություններով հատումից առաջացած կոները:

339. F_1 գլանը, որն առաջացել է միավոր կողմով քառակուսու՝ կողմերից մեկի շուրջը պտտումից, k = 4 գործակցով նմանադրումով արտապատկերվում է F_2 գլանի վրա: Գտեք F_2 գլանի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

ՀԻՄՆԱՎՈՐԵՆՔ ՄԵՐ ԳԻՏԵԼԻՔՆԵՐԸ

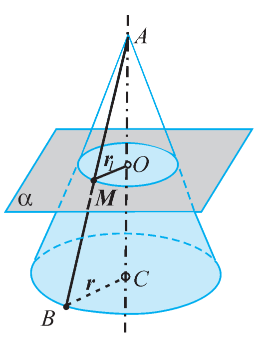
Ապացուցումներ երկրաչափությամբ առավել հետաքրքրվողների համար

Ա-1.

Կոնի առանցքին ուղղահայաց հարթույթը շրջան է, որի շառավիղը ուղիղ համեմատական է կոնի գագաթից մինչև փվյալ հարթույթը եղած հեռավորությանը:

Ապացուցում

Դիցուք՝ տրված է r շառավիղով կոն, որի բարձրությունը՝ AC-ն, հավասար է h-ի, իսկ առանցքին ուղղահայաց և նրան հատող α հարթությունը կոնի A գագաթից ունի h_1 հեռավորություն՝ ($AO=h_1$) (նկ. 111): M-ով նշանակենք α հարթության և կամայական AB ծնորդի հատման կետը և դիտարկենք AOM և ACB ուղղանկյուն եռանկյունները: Դրանք նման եռանկյուններ են, քանի որ ունեն ընդհանուր սուր անկյուն՝ $\angle A$-ն: Ուրեմն՝ $\frac{OM}{CB}=\frac{AO}{AC}$, կամ $OM=\frac{r}{h}\cdot h_1$: Ստացվում է, որ կոնի բոլոր ծնորդների հետ α հարթության հատման կետերը հավասարահեռ են կոնի առանցքի ու α հարթության հատման O կետից: Ուրեմն՝ այդ կետերը գտնվում են O կենտրոնով և $r_1=\frac{r}{h}\cdot h_1$ շառավիղով շրջանագծի վրա: Դժվար չէ նաև ցույց տալ, որ եթե α հարթության մեջ ընկած կամայական M կետը գտնվում է O կետից $r_1=\frac{r}{h}\cdot h_1$ հեռավորության վրա, ապա այն որևէ ծնորդի վրա գտնվող կետ է: Իսկապես, AM հատվածը շարունակենք մինչև կոնի հիմքի հարթության հետ հատման B կետը: Այդ դեպքում, քանի որ $\Delta AOM \sim \Delta ACB$, ապա $\frac{BC}{MO}=\frac{AC}{AO}$, որտեղից



Նկ. 111

$BC=\frac{AC}{AO}\cdot MO=\frac{h}{h_1}\cdot r_1=\frac{h}{h_1}\cdot\frac{r}{h}\cdot h_1=r$, ինչը նշանակում է, որ B-ն գտնվում է կոնի հիմքի շրջանագծի վրա:

Այսպիսով, O կենտրոնով և $r_1=\frac{r}{h}\cdot h_1$ շառավիղով շրջանագիծը կոնի կողմնային մակերևույթի հատույթն է առանցքին ուղղահայաց α հարթությամբ: Ուրեմն՝ այդ շրջանագծով եզերված շրջանը կոնի հատույթն է նույն հարթությամբ, իսկ շրջանի r_1 շառավիղն իրոք ուղիղ համեմատական է կոնի գագաթից մինչև հատող հարթությունը եղած h_1 հեռավորությանը: Պնդումն ապացուցված է:

Ա-2.

Հատված կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա հիմքերի շրջանագծերի երկարությունների կիսագումարի և ծնորդի արտադրյալին:

Ապացուցում

Դիցուք՝ A-ն այն կոնի գագաթն է, որից հատելով ստացվել է հատած կոնը, MB-ն հատած կոնի ծնորդներից մեկն է ($MB = \ell$), O-ն և C-ն նրա հիմքերի կենտրոնները, ընդ որում՝ $OM=r_1$, $BC=r$ (տե՛ս նկ. 111): Հատած կոնի կողմնային մակերևույթի $S_կ$ մակերեսը հաշվելու համար A գագաթով, r շառավիղով և AB ծնորդով կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսից հանենք A գագաթով, r_1 շառավիղով և AM ծնորդով կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը: Օգտվելով կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի բանաձևից և հաշվի առնելով, որ $AB = AM + MB = AM + \ell$, կստանանք՝

$$S_կ = \pi r \cdot AB - \pi r_1 AM = \pi r(AM + MB) - \pi r_1 AM = \pi r\ell + \pi(r - r_1) \cdot AM:$$

Արտահայտենք AM-ը r-ով, r_1-ով և ℓ-ով: Դիտարկենք AOM և ACB ուղղանկյուն եռանկյունները, որոնք ունեն ընդհանուր սուր անկյուն՝ $\angle A$-ն: Ուրեմն՝ այդ եռանկյունները նման են՝ $\Delta AOM \sim \Delta ACB$: Հետևաբար՝ $\frac{AM}{AB} = \frac{OM}{CB}$, կամ $\frac{AM}{AM + \ell} = \frac{r_1}{r}$: Ստացվում է՝ $AM = \frac{\ell \cdot r_1}{r - r_1}$:

Այն տեղադրենք $S_կ$-ի համար ստացված արտահայտության մեջ և կատարենք պարզ ձևափոխություններ, կստանանք՝

$$S = \pi r\ell + \pi(r - r_1) \cdot \frac{\ell r_1}{r - r_1} = \pi r\ell + \pi r_1 \ell = \pi(r + r_1)\ell :$$

Այսպիսով՝ r, r_1 հիմքերի շառավիղ և ℓ ծնորդ ունեցող հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S_կ = \pi(r + r_1)\ell$$

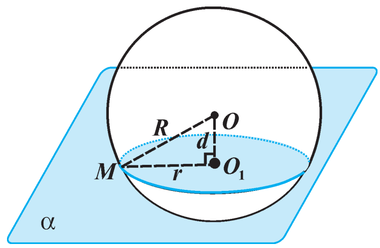
Քանի որ $\pi(r+r_1)$-ը հատած կոնի հիմքերի շրջանագծերի երկարությունների կիսագումարն է, իսկ ℓ-ը՝ նրա ծնորդը, ուրեմն պնդումն ապացուցված է:

Ա-3.

Գնդային մակերևույթը հարթությամբ հատելիս հատույթում առաջանում է շրջանագիծ:

Ապացուցում

Դիցուք՝ α հարթությունը հատում է O կենտրոնով և R շառավիղով գնդային մակերևույթը: Վերցնենք կամայական M կետ, որը միաժամանակ պատկանում է գնդային մակերևույթին $(OM=R)$ և α հարթությանը $(M\in\alpha)$: O կետից իջեցնենք α հարթությանն ուղղահայաց OO_1-ը և դրա O_1 հիմքը միացնենք M կետին (նկ. 112): Նշանակենք $OO_1=d$. այն ներկայացնում է O կետի հեռավորությունը α հարթությունից: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $0<d<R$:



Նկ. 112

Քանի որ $OO_1\perp\alpha$, ուրեմն $OO_1\perp O_1M$, այսինքն՝ ΔOO_1M-ը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Հետևաբար, ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $O_1M=\sqrt{OM^2-OO_1^2}=\sqrt{R^2-d^2}$:

Դրանից բխում է, որ գնդային մակերևույթի և հարթության հատման կետերը O_1 կետից գտնվում են նույն $\sqrt{R^2-d^2}$ հեռավորության վրա, այսինքն՝ գտնվում են O_1 կենտրոնով և $r=\sqrt{R^2-d^2}$ շառավիղով շրջանագծի վրա:

Մյուս կողմից հեշտ է ստուգել, որ α հարթության մեջ O_1 կենտրոնով և $r=\sqrt{R^2-d^2}$ շառավիղով շրջանագծի բոլոր կետերը միաժամանակ գտնվում են O կենտրոնով և R շառավիղով գնդային մակերևույթի վրա: Իսկապես, եթե M-ը այդ շրջանագծի որևէ կետ է ($O_1M=r=\sqrt{R^2-r^2}$), ապա OM-ի համար ստացվում է՝ $OM=\sqrt{OO_1^2+O_1M^2}=\sqrt{d^2+R^2-d^2}=R$:

Նշանակում է, M-ը O կետից ունի R հեռավորություն և, ուրեմն, գտնվում է գնդային մակերևույթի վրա: Իսկ եթե α հարթության մեջ ընկած որևէ K կետ չի գտնվում նշված շրջանագծի վրա, ապա այն չի գտնվի նաև տրված գնդային մակերևույթի վրա (եթե $O_1K\neq r$, ապա $OK\neq R$): Այն դեպքում, երբ α հարթությունն անցնում է O կետով ($d=0$), հատույթ են կազմում α հարթության բոլոր այն կետերը, որոնք O կետից ունեն R հեռավորություն, այսինքն՝ հատույթը O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագիծ է:

Այսպիսով, գնդային մակերևույթը հարթությամբ հատելիս հատույթում առաջանում է շրջանագիծ, որի կենտրոնը գնդի կենտրոնից տվյալ հարթությանն իջեցրած ուղղահայացի հիմքն է (կենտրոնի պրոյեկցիան է հատող հարթության վրա):

Ա-4.

Գլանի, կոնի և հատած կոնի համար ապացուցել կողմնային մակերևույթների մակերեսների հետևյալ ընդհանրական հատկությունը*.

Թեորեմ. ***Հետևյալ մարմիններից յուրաքանչյուրի՝ գլանի, կոնի և հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է այդ մարմնի բարձրության և այն շրջանագծի երկարության արտադրյալին, որի շառավիղը ծնորդի միջնուղղահայացի՝ մինչև առանցքի հետ հատման կետն ընկած հատվածն է:***

Ապացուցում

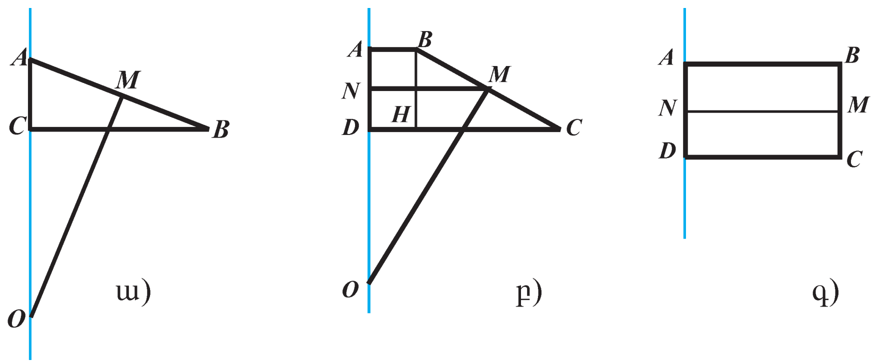
1. Դիցուք՝ կոնն առաջանում է ABC ուղղանկյուն եռանկյան պտտումից նրա AC էջի շուրջը (նկ. 113, ա): Տվյալ կոնի համար CB-ն շառավիղ է, AC-ն՝ բարձրությունն, իսկ AB-ն՝ ծնորդ: Որոշենք այդ կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը. $S_{կ} = \pi \cdot BC \cdot AB$: Եթե M-ը AB ծնորդի միջնակետն է ($AB = 2 \cdot AM$), ապա

$S_{կ} = 2 \cdot \pi \cdot BC \cdot AM$: (1)

Տանենք AB-ի միջնուղղահայացը՝ MO-ն, որտեղ O-ն այդ միջնուղղահայացի և AC առանցքի հատման կետն է: Նկատենք, որ ABC և AOM ուղղանկյուն եռանկյունները նման են (նրանք ունեն ընդհանուր սուր անկյուն՝ $\angle A$-ն): Ուրեմն՝ $\frac{BC}{OM} = \frac{AC}{AM}$, որտեղից $BC \cdot AM = AC \cdot OM$: Հետևաբար՝ (1) հավասարությունից ստացվում է $S_{կ} = 2 \cdot \pi \cdot AC \cdot OM$, և քանի որ $2\pi \cdot OM$-ը թեորեմում հիշատակված շրջանագծի երկարությունն է, ուրեմն՝ կոնի համար թեորեմն ապացուցված է:

2. Դիցուք՝ հատած կոնն առաջանում է $ABCD$ ուղղանկյուն սեղանի պտտումից AD կողմի շուրջը (նկ. 113,բ): Նրա համար AB-ն և DC-ն հիմքերի շառավիղներ են, AD-ն բարձրությունն է, իսկ BC-ն՝ ծնորդ: Որոշենք հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը: $S_{կ} = \pi \cdot BC \cdot (AB + DC)$: Եթե MN-ը սեղանի միջին գիծն է ($AB + DC = 2 \cdot MN$), ապա $S_{կ} = 2\pi \cdot BC \cdot MN$: (2)

* Այս հատկությունը որպես օժանդակ թեորեմ (լեմմ) ապացուցվում է, որպեսզի նրա միջոցով արտածվի գնդային մակերևույթի մակերեսի բանաձևը:



Նկ. 113

Տանենք $MO \perp BC$ և $BH \perp DC$: Ստացվում են MNO և BHC ուղղանկյուն եռանկյուններ, որոնք նման են (պարզաբանեք՝ ինչու): Ուրեմն՝ $\frac{MN}{BH}=\frac{OM}{BC}$, որտեղից $BC \cdot MN = BH \cdot OM = AD \cdot OM$: Հետևաբար՝ (2) հավասարությունից ստացվում է $S_կ=2\pi \cdot AD \cdot OM$, և քանի որ $2\pi \cdot$ OM-ը թեորեմում հիշատակված շրջանագծի երկարությունն է, ուրեմն՝ հատած կոնի համար ևս թեորեմն ապացուցված է:

3. Թեորեմում ձևակերպված պնդումը ճշմարիտ է նաև գլանի համար (նկ. 113, գ), քանի որ այդ դեպքում գլանի բարձրությունը հավասար է նրա ծնորդին, իսկ ծնորդի միջնուղղահայացի՝ մինչև առանցքի հետ հատման կետն ընկած հատվածը հավասար է գլանի շառավղին:

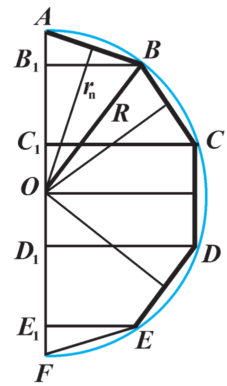
Ա-5.

Գնդային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա տրամագծի և մեծ շրջանագծի երկարության արտադրյալին:

Ապացուցում

Դիցուք՝ գնդային մակերևույթն առաջանում է R շառավղով ABF կիսաշրջանագծի պտտումից AF տրամագծի շուրջը: Այդ կիսաշրջանագիծը տրոհենք n ամբողջ թվով հավասար աղեղների, և տրոհման կետերը հաջորդաբար միացնենք հատվածներով (նկ. 114): Ստացվում է մի կանոնավոր բեկյալ, որ ներգծված է կիսաշրջանագծին: Եթե այդպիսի բեկյալի հատվածների (շրջանագծի լարերի) n թիվն անվերջ մեծացնենք, ապա դրան զուգընթաց փոքրանում է յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը և արդյունքում՝ որքան ուզեք քիչ են տարբերվում շրջանագծի և նրան ներգծյալ բեկյալի երկարությունները: Պատկերացնենք, որ կիսաշրջանագծին ներգծած կանոնավոր բեկյալը պտտվում է AF տրամագծի շուրջը: Այդ դեպքում նրա հատվածներն առաջացնում են մի այնպիսի մակերևույթ, որն էլ բեկյալի հատվածների n թվի անվերջ մեծացման դեպքում ձգտում է կիսաշրջանագծի պտտումից առաջացած գնդային մակերևույթին: Այսպիսով՝

գնդային մակերևույթի մակերեսը որոշելու համար հաշվենք այն սահմանը, որին ձգտում է կիսաշրջանագծին ներգծած կանոնավոր բեկյալի՝ այդ նույն տրամագծի շուրջը պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսը, երբ բեկյալի հատվածների թիվն անվերջ մեծանում է:



Նկ. 114

Նկատենք, որ տրամագծի շուրջը պտտելիս բեկյալի հատվածներից երկուսը (որոնք տրամագծի հետ ունեն ընդհանուր ծայրակետ) առաջացնում են կոնի կողմնային մակերևույթ, մյուսները՝ հատած կոնի կողմնային մակերևույթ, իսկ n թվի կենտ լինելու դեպքում հատվածներից մեկն առաջացնում է գլանի կողմնային մակերևույթ (տե՛ս նկ. 36): Այդ ամեն մի մակերևույթի մակերեսի համար կարող ենք օգտագործել պտտական մակերևույթի մակերեսի մասին թեորեմը (խնդիր Ա-4): Ընդ որում՝ այդ բոլոր մարմինների $h_1, h_2, ..., h_n$ բարձրությունների գումարը հավասար է հենց գնդային մակերևույթի տրամագծին (նկ. 114-ում $AB_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1F=2R$): Քանի որ բեկյալը կանոնավոր է, ապա նրա հատվածների (այսինքն՝ պտտական մարմինների ծնորդների) միջնուղղահայացներն անցնում են տրամագծի O միջնակետով:

Եթե նկարագրված պտտական մարմիններից յուրաքանչյուրի ծնորդի միջնակետից մինչև O կետի հեռավորությունը նշանակենք r_n, ապա հեշտ է նկատել, որ $r_n = R\cos\frac{90^0}{n}$: Գտնենք պտտական մարմինների մակերևույթների մակերեսները և դրանք գումարելով՝ որոշենք բեկյալի պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսը՝ S_n-ը (միաժամանակ նկատի ունենալով, որ $h_1+h_2+...+h_n=2R$).

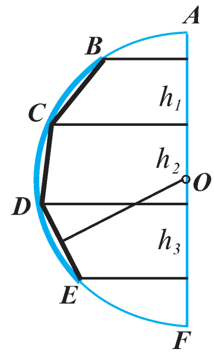
$$S_n = 2\pi h_1 R\cos\frac{90^0}{n} + 2\pi h_2 R\cos\frac{90^0}{n} + \ldots + 2\pi h_n R\cos\frac{90^0}{n} =$$

$$= 2\pi R\left(h_1 + h_2 + \ldots + h_n\right)\cos\frac{90^0}{n} = 4\pi R^2\cos\frac{90^0}{n} :$$

Այժմ պատկերացնենք, որ բեկյալի հատվածների n թիվն անվերջ մեծանում է (եթե $n\to\infty$, ապա $\frac{90^0}{n}\to 0$, ուրեմն՝ $\cos\frac{90^0}{n}\to 1$), այդ դեպքում S_n-ը ձգտում է

գնդային մակերևույթի S մակերեսին ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$): Հետևաբար՝ R շառավիղով գնդային մակերևույթի S մակերեսի համար կստանանք $S=4\pi R^2$:

Մնում է նկատել, որ $4\pi R^2=2R\cdot 2\pi R$, որտեղ $2R$-ը գնդային մակերևույթի տրամագիծն է, իսկ 2πR-ը՝ մեծ շրջանագծի երկարությունը: Պնդումն ապացուցված է:



Նկ. 115

Պարզաբանում.

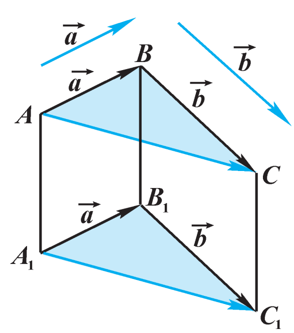
Գնդային գոտու, ինչպես նաև սեգմենտային մակերևույթի մակերեսի բանաձևը կարելի է արտածել հենց այն եղանակով, ինչպես արվեց գնդային մակերևույթի մակերեսի համար: Այս դեպքում ևս նախ n հավասար մասերի է տրոհվում այն աղեղը, որի պտտումից առաջանում է տվյալ մակերևույթը (նկ. 115): Այնուհետև դիտարկվում է այդ աղեղին ներգծած կանոնավոր բեկյալի պտտումից առաջացած մակերևույթի մակերեսի սահմանը, երբ n-ը անվերջ մեծանում է: Այս դեպքում ևս օգտվում ենք պտտական մակերևույթի մակերեսի մասին թեորեմից, միաժամանակ նկատի ունենալով, որ բեկյալի հատվածների պտտումից առաջացած բոլոր մարմինների բարձրությունների գումարը հավասար է դիտարկվող պատկերի (գնդային գոտու կամ սեգմենտային մակերևույթի) բարձրությանը (նկ. 115-ում $h=h_1+h_2+h_3$): Արդյունքում ստացվում է, որ *գնդային գոտու, ինչպես նաև սեգմենտային մակերևույթի մակերեսը հավասար է նրա բարձրության և գնդային մակերևույթի մեծ շրջանագծի երկարության արտադրյալին*: Այսինքն՝ $S=2\pi Rh$, որտեղ h-ը այն գնդային գոտու կամ սեգմենտային մակերևույթի բարձրությունն է, որն անջատված է R շառավիղով գնդային մակերևույթից: Նկատենք, որ սեգմենտային մակերևույթի (կամ գնդային գոտու) մակերեսի բանաձևից կարելի է մասնավորապես ստանալ գնդային մակերևույթի մակերեսի բանաձևը՝ տեղադրելով $h=2R$:

Ա-6.

Կամայական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը կախում չունի այն կետի ընտրությունից, որից տեղադրվում է $\vec{a}$ վեկտորը:

Ապացուցում.

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն տրված կամայական վեկտորներ են, որևէ A կետից տեղադրել ենք $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, դրա B վերջնակետից՝ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ վեկտորը, և արդյունքում ստացել $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը: Ցույց տանք, որ եթե a վեկտորի տեղադրման A կետը փոխարինենք մեկ այլ՝ A_1 կետով, ապա այդ կետից տեղադրելով $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$ և այնուհետև B_1 կետից՝ $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$ վեկտորը՝ արդյունքում կստանանք այնպիսի $\overrightarrow{A_1C_1}$ վեկտոր, որը հավասար է $\overrightarrow{AC}$ վեկտորին



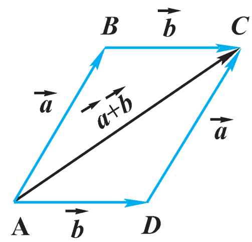
Նկ. 116

(նկ. 116): Դրանից էլ կհետևի, որ $\vec{a}+\vec{b}$ գումարը կախում չունի $\vec{a}$ վեկտորի տեղադրման կետից: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ A_1, B_1 և C_1 կետերն ընկած չեն ABC հարթության մեջ (մի հարթության մեջ ընկած լինելու դեպքը մեզ ծանոթ է հարթաչափությունից, կարող եք դիտարկել ինքնուրույն): Այդ դեպքում, քանի որ $\vec{AB}=\vec{a}$ և $\vec{A_1B_1}=\vec{a}$, ուրեմն՝ $\vec{AB}=\vec{A_1B_1}$, որը նշանակում է, որ AB և A_1B_1 հատվածները զուգահեռ են և հավասար (տե՛ս նկ. 116): Հետևաբար՝ ABB_1A_1 քառանկյունը զուգահեռագիծ է և, ուրեմն, $\vec{AA_1}=\vec{BB_1}$: Նմանապես $\vec{BC}=\vec{b}=\vec{B_1C_1}$ հավասարությունից հետևում է, որ BCC_1B_1-ը ևս զուգահեռագիծ է և, ուրեմն, $\vec{BB_1}=\vec{CC_1}$: Ստացված $\vec{AA_1}=\vec{BB_1}=\vec{CC_1}$ հավասարություններից հետևում է, որ ACC_1A_1 քառանկյունը նույնպես զուգահեռագիծ է և, ուրեմն, $\vec{AC}=\vec{A_1C_1}$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

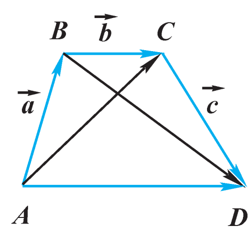
Ա-7.

Վեկտորների գումարն օժտված է տեղափոխական և զուգորդական հատկություններով, այսինքն՝ ցանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

ա) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, **բ)** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$:



Նկ. 117



Նկ. 118

Ապացուցում.

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները զույգ առ զույգ տարագիծ են (դրանց համագիծ լինելու դեպքը մեզ ծանոթ է հարթաչափությունից, կարող եք դիտարկել ինքնուրույն):

ա) Կամայական A կետից տեղադրենք $\vec{AB}=\vec{a}$ և $\vec{AD}=\vec{b}$ վեկտորները և այդ վեկտորների վրա կառուցենք $ABCD$ զուգահեռագիծը (նկ. 117): Ըստ երեք կետերի կանոնի՝ $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ և $\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{AC}$: Հետևաբար՝ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}$ և $\vec{b}+\vec{a}=\vec{AC}$, և այդ հավասարություններից բխում է, որ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$:

բ) Կամայական A կետից տեղադրենք $\vec{AB}=\vec{a}$ վեկտորը, այնուհետև B կետից՝ $\vec{BC}=\vec{b}$ վեկտորը և C կետից՝ $\vec{CD}=\vec{c}$ վեկտորը (նկ. 118): Հաջորդաբար կիրառելով երեք կետերի կանոնը՝ կստանանք՝

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\vec{AB}+\vec{BC})+\vec{CD}=\vec{AC}+\vec{CD}=\vec{AD}$,

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{AB}+(\vec{BC}+\vec{CD})=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}$:

Ստացված հավասարություններից հետևում է, որ

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$:

Պնդումն ապացուցված է:

Ա-8.

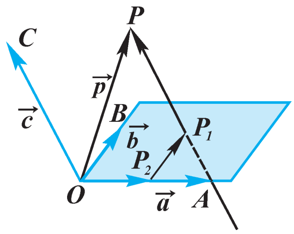
Յանկացած վեկտոր կարելի է վերածել ըստ տրված երեք ոչ համահարթ վեկտորների, ընդ որում՝ վերածման գործակիցները որոշվում են միարժեքորեն:

Ապացուցում.

Դիցուք՝ $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն, $\vec{c}$-ն տրված տարահարթ վեկտորներ են, իսկ $\vec{p}$-ն՝ կամայական վեկտոր: Ցույց տանք, որ $\vec{p}$-ն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \qquad (1)$$

որտեղ x-ը, y-ը, z-ը որևէ թվեր են, որոնք որոշվում են միարժեքորեն:



Նկ. 119

Տարածության մեջ վերցնենք որևէ O կետ և այդ կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, և $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ վեկտորները (նկ. 119): Տանենք P կետով անցնող ուղիղ, որը զուգահեռ է OC ուղղին, և այդ ուղղի ու AOB հարթության հատման կետը նշանակենք P_1 (եթե P կետն ընկած է OC ուղղի վրա, ապա որպես P_1 կընդունենք O կետը): Այնուհետև տանենք P_1 կետով անցնող ուղիղ, որը զուգահեռ է OB ուղղին, և այդ ուղղի ու OA ուղղի հատման կետը նշանակենք P_2 (եթե P_1 կետն ընկած է OB ուղղի վրա, ապա որպես P_2 կընդունենք O կետը): Ըստ մի քանի վեկտորների գումարման կանոնի՝ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$: (2)

Նկատենք, որ $\overrightarrow{OP_2}$ և $\vec{a}$ վեկտորները համագիծ են, ուրեմն՝ $\overrightarrow{OP_2} = x\vec{a}$, որտեղ x-ը որևէ թիվ է: Նմանապես համագիծ են նաև $\overrightarrow{P_2P_1}$ և $\vec{b}$, ինչպես նաև $\overrightarrow{P_1P}$ և $\vec{c}$ վեկտորները: Ուրեմն՝ $\overrightarrow{P_2P_1} = y\vec{b}$ և $\overrightarrow{P_1P} = z\vec{c}$, որտեղ y-ը և z-ը որևէ թվեր են: Կատարելով համապատասխան տեղադրումներ (2) հավասարության մեջ՝ կստանանք՝ $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, այսինքն՝ $\vec{p}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների: Մնում է ցույց տալ, որ x, y և z գործակիցները որոշվում են միարժեքորեն:

Ենթադրենք՝ $\vec{p}$ վեկտորի $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ վերածման հետ մեկտեղ կա նաև այլ վերածում՝ $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$: Այդ դեպքում, երկու հավասարությունները միմյանցից հանելով, կստանանք՝ $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = \vec{0}$: (3)

Սակայն, քանի որ $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն և $\vec{c}$-ն տարագիծ վեկտորներ են, (3) հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ $x - x_1$, $y - y_1$ և $z - z_1$ գործակիցները միաժամանակ զրո են՝ $x - x_1 = y - y_1 = z - z_1 = 0$: Իսկապես, հակառակ դեպքում, եթե ենթադրենք, թե, ասենք, $x - x_1 \neq 0$, ապա կստացվի, որ $\vec{a} = \frac{y - y_1}{x_1 - x}\vec{b} + \frac{z - z_1}{x_1 - x}\vec{c}$:

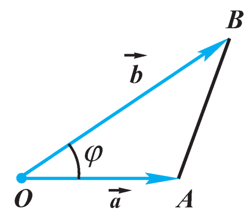
Իսկ դա կնշանակեր, որ $\vec{a}$ վեկտորը $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների հետ համահարթ է, ինչը կհակասեր թեորեմի պայմանին: Այսպիսով՝ $x-x_1=y-y_1=z-z_1=0$, կամ $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$: Դրանից հետևում է, որ վերածման x, y, z գործակիցները որոշվում են միարժեքորեն: Պնդումն ապացուցված է:

Ա-9.

Կոորդինատներով տրված $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ և $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հաշվվում է $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ բանաձևով:

Ապացուցում.

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են (դրանց համագիծ լինելու դեպքը դիտարկեք ինքնուրույն): Կոորդինատների O սկզբնակետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ վեկտորները և A ու B կետերը միացնենք հատվածով (նկ. 120): Ըստ կոսինուսների թեորեմի՝ $AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\varphi$, (1) որտեղ $\varphi=\angle(\vec{a}\,\vec{b})$: Նկատի ունենանք, որ $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ և $OA\cdot OB\cdot\cos\varphi=\vec{a}\cdot\vec{b}$: Ուրեմն՝ (1) հավասարությունը ստանում է հետևյալ տեսքը՝ $(\vec{b}-\vec{a})^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-2\vec{a}\,\vec{b}$, կամ



Նկ. 120

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-(\vec{b}-\vec{a})^2\right): \qquad (2)$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{b}-\vec{a}$ վեկտորների սկալյար քառակուսիներն արտահայտենք այդ վեկտորների կոորդինատներով, կստանանք՝ $\vec{a}^{\,2}=x_1^2+y_1^2+z_1^2$, $\vec{b}^{\,2}=x_2^2+y_2^2+z_2^2$, $(\vec{b}-\vec{a})^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$:

Այս արտահայտությունները տեղադրենք (2) հավասարության մեջ և կատարենք անհրաժեշտ պարզեցումներ, կստանանք՝

$$\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-x_2^2+2x_1x_2-x_1^2-$$

$$-y_2^2+2y_1y_2-y_2^2-z_2^2+2z_1z_2-z_1^2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \;:$$

Այսինքն՝ $\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ա-10.

Յանկացած $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների և կամայական k թվի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

ա) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$, **բ)** $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\vec{b}=\vec{a}(k\vec{b})$ **:**

Ապացուցում.

Ներմուծենք կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ, և $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների կոորդինատները նշանակենք համապատասխանաբար՝ $\vec{a}\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c}\{x_3, y_3, z_3\}$: Օգտվենք վեկտորների հետ կատարվող գործողությունների՝ կոորդինատներով արտահայտման բանաձևերից և կատարենք անհրաժեշտ պարզեցումներ:

ա) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3+(z_1+z_2)z_3=$
$=x_1x_3+x_2x_3+y_1y_3+y_2y_3+z_1z_3+z_2z_3=$
$=(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)+(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$:
Այսպիսով՝ $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$:

բ) $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=k(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=k\,x_1x_2+k\,y_1y_2+k\,z_1z_2=$
$=(kx_1)x_2+(ky_1)y_2+(kz_1)z_2=(k\vec{a})\cdot\vec{b}$: Այսինքն՝ $k(\vec{a}\vec{b})=(k\vec{a})\cdot\vec{b}$:

Նույն ձևով ապացուցվում է, որ $k(\vec{a}\vec{b})=\vec{a}(k\vec{b})$:

Կրկնության հարցեր և խնդիրներ

340. a և b կողմերով ($a<b$) ուղղանկյունը պտտում են մի դեպքում կողմերից մեկի, երկրորդ դեպքում՝ մյուսի շուրջը: Համեմատեք ստացված գլանների՝ **ա)** կողմնային մակերևույթների մակերեսները, **բ)** լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

341. Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է 4π: Որոշեք, թե ինչպիսի արժեքներ կարող է ընդունել նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե $r\in[1,2]$:

342. a և b էջերով ($a<b$) ուղղանկյուն եռանկյունը պտտում են մի դեպքում էջերից մեկի, երկրորդ դեպքում՝ մյուսի շուրջը: Համեմատեք ստացված կոների՝ **ա)** կողմնային մակերևույթների մակերեսները, **բ)** լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

343. 6 սմ և 8 սմ կողմեր և 60° անկյուն ունեցող զուգահեռագիծը պտտում են մեծ կողմն ընդգրկող ուղղի շուրջը: Գտեք ստացված մարմնի մակերևույթի մակերեսը:

344. Ընդհանուր կողմ ունեցող երկու ուղղանկյուններն ընկած են տարբեր հարթությունների մեջ: Ցույց տվեք, որ գոյություն ունի այնպիսի գնդային մակերևույթ, որն անցնում է այդ ուղղանկյունների բոլոր գագաթներով:

345. 7 սմ շառավիղով գնդային մակերևույթը հատում են երկու փոխուղղահայաց հարթություններ: Ստացված հատույթները հավասար շրջանագծեր են, որոնք ունեն 2 սմ երկարությամբ ընդհանուր լար: Գտեք այդ շրջանագծերի շառավիղները:

346. Հարթության վրա տեղադրված են 1 սմ և 2 սմ շառավիղներով երկու գնդեր այնպես, որ յուրաքանչյուր գնդի մակերևույթը շոշափում է հարթությունը և մյուս գնդի մակերևույթը: Գտեք՝ **ա)** այն կետերի հեռավորությունը, որոնցում գնդերի մակերևույթները շոշափում են հարթությունը, **բ)** գնդերի մակերևույթների՝ միմյանց շոշափման կետի հեռավորությունը հարթությունից:

347*. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը հավասար է a-ի, իսկ գագաթի հարթ անկյունը՝ α-ի: Գտեք այդ բուրգին ներգծած և արտագծած գնդերի շառավիղները:

348. Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, որպեսզի տեղի ունենան հետևյալ հավասարությունները.

ա) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$, **բ)** $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$,

գ) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$, **դ)** $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$:

349. $SABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի SO բարձրությունը 8 սմ է, հիմքի կողը՝ 6 սմ: Գտեք հետևյալ վեկտորի մոդուլը՝ **ա)** $\vec{AS}$, **բ)** $\vec{SC}-\vec{SB}$, **գ)** $\vec{SO}-\vec{SA}$, **դ)** $\vec{SB}-\vec{SD}$:

350. Տրված են ոչ զրոյական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները. ընդ որում՝ $\vec{b}=4\vec{a}$: y-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում տեղի ունի $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{y}(\vec{a}-\vec{b})$ հավասարությունը:

351. AM-ը, BN-ը և CK-ն ABC եռանկյան միջնագծերն են: Ցույց տվեք, որ $\vec{AM}+\vec{BN}+\vec{CN}=\vec{0}$:

352*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդում M կետը DD_1C_1C նիստի կենտրոնն է: Սո՞ւր, ուղի՞ղ, թե՞ բութ է $\vec{AM}$ և $\vec{BD_1}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

353. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ հատած բուրգի $ABCD$ հիմքը սեղան է (AB-ն և CD-ն սրունքներ են): Ընտրեք այնպիսի $\vec{x}$ վեկտոր, որի ծայրակետերը լինեն հատած բուրգի գագաթներ, և որը տրված երկու վեկտորների հետ լինի համահարթ. **ա)** $\vec{AB}$, $\vec{AA_1}$, $\vec{x}$, **բ)** $\vec{AD}$, $\vec{DC}$, $\vec{x}$, **գ)** $\vec{AB}$, $\vec{B_1C_1}$, x, **դ)** $\vec{BC}$, $\vec{A_1D_1}$, $\vec{x}$:

354. A-ն, B-ն, C-ն, D-ն զուգահեռագծի գագաթներ են, իսկ M-ը՝ անկյունագծերի հատման կետը: Ցույց տվեք, որ $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=4\vec{OM}$, որտեղ O-ն տարածության կամայական կետ է:

355. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը 1 սմ է: Գտեք $\vec{a}=2\vec{m}+2\vec{n}-\vec{p}$ վեկտորի մոդուլը, որտեղ $\vec{m}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{p}=\overrightarrow{AA_1}$:

356*. Ցույց տվեք, որ նյութական կետի վրա ազդող ուժերի համազորի կատարած աշխատանքը հավասար է այդ ուժերի կատարած աշխատանքների գումարին:

357. Մարմնի վրա նրա տեղափոխության ուղղության նկատմամբ 60^o անկյան տակ ազդում է 18 Ն ուժ, 120^o անկյան տակ՝ 8 Ն ուժ, և տեղափոխությանը հակադիր ուղղությամբ՝ 3 Ն ուժ: Գտեք այդ ուժերի համազորի կատարած աշխատանքը մարմնի 10 մ տեղափոխության դեպքում:

358. Եռանկյան հարթության մեջ նրա յուրաքանչյուր կողմի՝ գագաթներից տարբեր որևէ կետից տեղադրված է այնպիսի վեկտոր, որն ուղղահայաց է այդ կողմին, ուղղված է եռանկյունուց դեպի դուրս, և նրա մոդուլը հավասար է տվյալ կողմի երկարությանը: Ապացուցեք, որ այդ երեք վեկտորների գումարը զրոյական վեկտոր է:

359. Ապացուցեք, որ զուգահեռանիստի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և հատման կետում կիսվում են:

360*. Դիտարկվում է եռանկյուն, որի համար որպես գագաթներ են վերցվում զուգահեռանիստի մի գագաթից ելնող երեք կողերի ծայրակետերը: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետն ընկած է զուգահեռանիստի նույն գագաթից ելնող անկյունագծի վրա և այդ անկյունագիծը տրոհում է 1:2 հարաբերությամբ:

361. Տրված է $\vec{a}\{3, 2, 1\}$ վեկտորը: Գտեք այնպիսի $\vec{b}$ վեկտոր, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}-\vec{k}$ վեկտորները լինեն համագիծ:

362. Կոորդինատների $Oxyz$ համակարգում տրված է $A(1, -1, 0)$ կետը: Oz առանցքի վրա գտեք այնպիսի B կետ, որ $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի մոդուլը կրկնակի մեծ լինի $\overrightarrow{OA}$ վեկտորի մոդուլից:

363. Պարզեք, թե F_1 և F_2 երկու պատկերների կետերի միջև տրված հարաբերակցությունն արդյոք փոխմիարժե՞ք է, եթե՝

ա) F_1 պատկերը տրված ABC եռանկյան AB կողմն է, իսկ F_2 պատկերը՝ AC կողմը, ընդ որում՝ F_1 պատկերի B կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի C կետի հետ, իսկ նրա B-ից տարբեր կամայական M կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի այն M_1 կետի հետ, որի համար բավարարվում է $MM_1 \parallel BC$ պայմանը,

բ) F_1 պատկերը տրված շրջանագիծ է, իսկ F_2 պատկերը՝ այդ շրջանագծի AB տրամագիծը, ընդ որում՝ F_1 պատկերի A և B կետերից տարբեր կամայական M կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի այն

M_1 կետի հետ, որի համար բավարարվում է $MM_1 \perp AB$ պայմանը, իսկ A և B կետերը հարաբերակցվում են իրենք իրենց հետ,

գ) F_1 պատկերը տրված շրջանագծի AB լարն է, իսկ F_2 պատկերը՝ այդ շրջանագծի՝ A և B ծայրակետերով փոքր աղեղը, ընդ որում՝ F_1 պատկերի A և B կետերը հարաբերակցվում են F_2 պատկերի նույն A և B կետերի հետ, իսկ դրանցից տարբեր կամայական M կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի այն M_1 կետի հետ, որի համար բավարարվում է $MM_1 \perp AB$ պայմանը,

դ) F_1 պատկերը տրված $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի ABB_1A_1 նիստն է, իսկ F_2 պատկերը՝ $ABCD$ նիստը, ընդ որում՝ F_1 պատկերի B_1 կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի C կետի հետ, իսկ նրա B_1-ից տարբեր կամայական M կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի այն M_1 կետի հետ, որի համար բավարարվում է $MM_1 \parallel B_1C$ պայմանը,

ե) F_1 պատկերը տրված $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի $ABCD$ նիստն է, իսկ F_2 պատկերը՝ $A_1B_1C_1D_1$ նիստը, ընդ որում՝ F_1 պատկերի կամայական M կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի այն M_1 կետի հետ, որի համար բավարարվում է $MM_1=2MO$ պայմանը, որտեղ O-ն այդ զուգահեռանիստի անկյունագծերի հատման կետն է,

զ) F_1 պատկերը տրված կոնի կողմնային մակերևույթն է, իսկ F_2 պատկերը՝ այդ կոնի հիմքի շրջանը, ընդ որում՝ F_1 պատկերի կամայական M կետը հարաբերակցվում է F_2 պատկերի այն M_1 կետի հետ, որի համար բավարարվում է $MM_1 \perp \alpha$ պայմանը, որտեղ α-ն կոնի հիմքի հարթությունն է (կոնի հիմքի շրջանագծի կետերը հարաբերակցվում են իրենք իրենց հետ):

364. Խնդիր 363-ում բերված օրինակներից որի՞ դեպքում են պահպանվում կետերի միջև հեռավորությունները (այսինքն՝ F_1 պատկերի կամայական երկու կետերի հեռավորությունը հավասար է F_2 պատկերի՝ դրանց հարաբերակից կետերի հեռավորությանը):

365. Որոշեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) կենտրոնային համաչափության դեպքում համաչափության կենտրոնով անցնող ուղիղն արտապատկերվում է ինքն իր վրա,

բ) առանցքային համաչափության դեպքում համաչափության առանցքին ուղղահայաց ուղիղն արտապատկերվում է այդ առանցքը հատող ուղղի վրա,

գ) հայելային համաչափության դեպքում համաչափության հարթությանն ուղղահայաց հարթությունն արտապատկերվում է ինքն իր վրա,

դ) կենտրոնային համաչափության դեպքում համաչափության կենտրոնով անցնող հարթությունն արտապատկերվում է ինքն իր վրա:

366. Գտեք $A(3, -1, 1)$, $B(-1, 1, 3)$ և $C(1, -1, 3)$ գագաթներով եռանկյան պարագիծը, մակերեսը և անկյունները:

367. Զուգահեռ տեղափոխության արդյունքում $A(-1, 2, 1)$ կետն արտապատկերվել է $B(2, 0, -1)$ կետի վրա: Այդ դեպքում ո՞ր կետն է արտապատկերվում՝ **ա)** $A(-1, 2, 1)$ կետի վրա, **բ)** կոորդինատների սկզբնակետի վրա, **գ)** $M(m, m, -m)$ կետի վրա:

368. Տարածության կամայական $M(x, y, z)$ կետը հարաբերակցվում է այնպիսի N կետի հետ, որի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ կերպ՝ **ա)** $N(-x, y, z)$, **բ)** $N(x, -y, -z)$, **գ)** $N(|x|, y, z)$, **դ)** $N(x, y, 0)$, **ե)** $N(2x, 2y, 2z)$, **զ)** $N(x-1, y, z)$, **է)** $N(1-x, 1-y, 1-z)$: Պարզեք, թե այդպիսի հարաբերակցության դեպքում արդյոք տրվո՞ւմ է տարածության շարժում:

369*. Տրված է այնպիսի շարժում, որի դեպքում A կետը փոխադրվում է B կետին, իսկ B կետը՝ A կետին: Ցույց տվեք, որ այդ դեպքում AB ուղիղն արտապատկերվում է ինքն իր վրա:

370*. a-ն և b-ն խաչվող ուղիղներ են: Կարո՞ղ եք նշել այնպիսի շարժումներ, որոնց դեպքում a ուղիղն արտապատկերվում է b ուղղի վրա:

371. Գտեք այն մարմնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, որն առաջանում է, երբ 6 և 8 էջերով ուղղանկյուն եռանկյունը կատարում է $180°$-ի պտույտ այն առանցքի շուրջը, որն անցնում է մեծ էջի հանդիպակաց անկյան գագաթով և զուգահեռ է այդ էջին:

372. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի անկյունագծային հատույթը 6 միավոր կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է: Այդ բուրգը $k = \frac{1}{2}$ գործակցով նմանության արտապատկերումով փոխադրվում է մի ուրիշ բուրգի: Գտեք այդ երկու բուրգերի լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ I

1. 16π սմ: **2.** Շրջան և օղակ, 100π սմ^2 և 300π սմ^2: **3.** $6\sqrt{3}\pi$ սմ: **4.** $\frac{1}{2}$: **5.** 10 սմ, 20 սմ: **6.** ա) Կեղծ, բ) ճշմարիտ, գ) կեղծ (կարող է անցնել ծնորդով), դ) ճշմարիտ: **7.** Այո: **8.** ա) Գլան, որի շառավիղը խորանարդի հիմքի անկյունագիծն է, բ) գլան, որի շառավիղը պտտվող գլանի տրամագիծն է: **9.** Առաջանում է գլանաձև մարմին, որի միջից հեռացված է նույն բարձրությունով և կրկնակի փոքր շառավիղով գլանը: **10.** ա) 112π սմ^2 և 210π սմ^2, բ) 6 սմ և 320π սմ^2, գ) 4 սմ և 32π սմ^2, դ) 3 սմ և 6 սմ: **11.** 384π սմ^2 և 672π սմ^2: **12.** ա) Մեծացնել 2 անգամ, բ) փոքրացնել 2 անգամ: **13.** Մեծ է: **14.** ա) Յուրաքանչյուրը 16π սմ^2, հավասար են, բ) առաջինը՝ 24π սմ^2, կրկնակի փոքր է երկրորդից՝ 48π սմ^2-ից: **15.** Շառավիղից 1,5 անգամ մեծ: **16.** 11: **17.** ≈1,29մ^2: **18.** ≈15,6սմ: **19.** ա) Այո, երբ r=1, բ) $[4\pi, 12\pi]$ միջակայքի արժեքները: **20.** Գլանի մակերևույթը մեծ է $\frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{6}$ անգամ (≈1,26 անգամ): **21.** 64 սմ^2: **22.** 8 սմ: **23.** 2 սմ և $2\sqrt{2}$ սմ: **24.** 4 սմ, 8 սմ, $4\sqrt{3}$ սմ: **25.** 9 սմ, 9 սմ, $9\sqrt{2}$ սմ: **26.** Պտտական մարմին է՝ կազմված նույն հիմքով երկու կոներից, որոնց ծնորդները պտտվող եռանկյան էջերն են: **27.** Պտտական մարմին է, որը կազմված է՝ ա) նույն հիմքով գլանից և կոնից. գլանի ծնորդը պտտվող սեղանի փոքր հիմքն է, կոնի ծնորդը՝ մեծ սրունքը, բ) գլանից, որից հեռացված է նույն հիմքով կոն. գլանի ծնորդը պտտվող սեղանի մեծ հիմքն է, կոնի ծնորդը՝ մեծ սրունքը: **29.** ա) Ոչ (հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքի համապատասխանաբար ներգծյալ և արտագծյալ շրջանագծի կենտրոնով), բ) ոչ, (միայն այն դեպքում է հնարավոր, երբ բուրգի հիմքին հնարավոր է համապատասխանաբար ներգծել կամ արտագծել շրջանագիծ և միաժամանակ բուրգի բարձրությունն անցնում է այդ շրջանագծի կենտրոնով): **30.** ա) Կեղծ, բ) ճշմարիտ, գ) ճշմարիտ, դ) ճշմարիտ: **31.** Այո: **32.** Կոն՝ եթե առանցքն անցնում է բուրգի հիմքին պատկանող կետով, հակառակ դեպքում՝ կոնաձև մարմին, որը ստացվում է կոնից հեռացնելով նույն գագաթով, նույն բարձրությունով և ավելի փոքր շառավիղով մի կոն: **33.** ա) 54π սմ^2 և 90π սմ^2, բ) 6 սմ և 40π սմ^2, գ) 7 սմ և 35π սմ^2, դ) 2 դմ և 3 դմ: **34.** 156π սմ^2 և 300π սմ^2: **35.** 27π սմ^2, ոչ (առանցքային հատույթի գագաթին հարակից անկյունը 120^0 է): **36.** 2 սմ և 12 սմ: **37.** 60^0: **38.** 18π մ^2 (≈56,5մ^2): **39.** 420π սմ^2: **40.** Մեծ է: **41.** 22 սմ: **42.** 8 սմ: **43.** 16π սմ^2: **44.** $3(13+\sqrt{34})\pi$ սմ^2: **45.** ա) 9π սմ^2, բ) 375π սմ^2, գ) 15π սմ^2, դ) 360π սմ^2, ե) 594π սմ^2: **46.** ա) 5 սմ, բ) 1,25 սմ, գ) 56π սմ^2: **47.** ≈ 8կգ: **48*.** Այո՝ r=1 դեպքում: ա) $[3\pi, 5{,}25\pi]$ միջակայքի արժեքները, բ) այդպիսի կոն չի կարող լինել: **49.** $\frac{\pi}{3}$ սմ^2 և $\frac{13\pi}{36}$ սմ^2: **50*.** $S(x)=\sqrt{(9+x^2)(25-x^2)}$, որտեղ $x\in[0,5)$: **51.** Ոչ: **52.** Հավասարասրուն, $MN\perp OK$: **53.** $4\sqrt{3}$ սմ: **54.** $6\sqrt{2}$ սմ: **55.** ա) Ճշմարիտ, բ) ճշմարիտ, գ) ճշմարիտ, դ) կեղծ: **56.** 13 սմ: **57.** 100π սմ^2: **58.** $10\sqrt{2}\pi$ սմ: **59.** ա) $6\sqrt{2}$ սմ, բ) $2\sqrt{6}$ սմ: **60.** ա) Կմեծանա 9 անգամ, բ) կփոքրանա 4 անգամ: **61.** ա) Մեկ, բ) անվերջ թվով: **62.** 12 սմ: **63.** ≈6369 կմ: **64.** Լուսնի մակերևույթի մակերեսը 16 անգամ փոքր է: **65.** 1024π սմ^2: **66.** ≈1990 սմ^2: **67.** 300π սմ^2: **68.** Մեծ է: **69.** Կեսը: **70.** 20 սմ: **71.** 10π սմ: **72.** ≈28400 կմ: **75.** $2\sqrt{3}$ սմ: **76.** 676π սմ^2: **77*.** $\frac{R}{3}$:

78. $\frac{r\sqrt{3}}{2}$: **79.** Շրջանագիծ, 8սմ: **80** $R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$-ից ոչ մեծ: **81.** 500 սմ^2: **82.** 30^0, 30^0, 120^0: **83.** $2\arcsin\frac{1}{6}$: **84.** $\frac{3m}{4}$: **85.** ա) $40\sqrt{3}\pi$ սմ^2, բ) $56\sqrt{3}\pi$ սմ^2: **86.** $2|S_1 - S_2|$: **87.** 10 սմ: **88.** 12 սմ: **89.** $4\sqrt{13}$ սմ: **90.** $\pi\sqrt{3}R$: **91.** $\sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}$: **Ցուցում.** Օգտագործել գլանի մակերևույթի փռվածքը: **92*.** $d(x)=\frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi x}{6}$, որտեղ՝ $x\in[0, 6]$: **Ցուցում.** Դիտարկել $r=\frac{6}{2\pi}=\frac{3}{\pi}$ շառավիղով շրջանագիծ և նրա MM_1 լարի երկարությունն արտահայտել $\overset{\cup}{MM_1}$ աղեղի x երկարությամբ: **93.** 8π սմ^2: **94.** 64π սմ^2: **95.** 90π սմ^2: **96.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$: **97.** 2 սմ: **98.** $\frac{6}{\pi}$: **99.** 16π սմ^2: **100.** $arctg\frac{1}{2}$: **101.** a: **102.** $8\pi R^2$: **103.** $4(\sqrt{2}-1)$: **104.** $\frac{2R}{\sin\varphi}$, $Rtg\frac{\varphi}{2}$, $Rctg\frac{\varphi}{2}$: **105*.** $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$: **106.** $\sqrt{r_1 r_2}$: **107.** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

ԳԼՈՒԽ II

111. ա) 6, բ) 12: **112.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո: **113.** 4 սմ, 3 սմ, 2 սմ, 3 սմ: **114.** 2 սմ, $2\sqrt{2}$ սմ, $2\sqrt{2}$ սմ, $2\sqrt{3}$ սմ: **115.** ա) 5 սմ, բ) $5\sqrt{2}$ սմ: **116.** 10 սմ, 13 սմ: **117.** Ոչ: **118.** Այո, քանի որ AB և CD հատվածները կա՛մ կլինեն զուգահեռ, կա՛մ կգտնվեն մի ուղղի վրա: **119.** ա) Կեղծ, բ) ճշմարիտ, գ) ճշմարիտ, դ) կեղծ, ե) ճշմարիտ, զ) ճշմարիտ: **120.** ա) Այո, բ) այո, գ) այո, դ) այո, ե) այո, զ) այո: **121.** ա, դ, ե, զ: **122.** Այո: **123.** ա) $\overrightarrow{CC_1}$, բ) $\overrightarrow{DK}$, գ) $\overrightarrow{A_1C_1}$, դ) $\overrightarrow{C_1B_1}$, ե) $\overrightarrow{KA_1}$: **124.** ա) Զուգահեռ են, բ) հատվում են, գ) ուղիղն ընկած է հարթության մեջ, դ) հատվում կամ համընկնում են: **125.** 5 սմ: **126.** Հյուսիս-արևելք 75 կմ: **127.** ա) 200սմ, բ) 50սմ դեպի հարավ-արևելք: **128.** $\vec{a}$ վեկտորի ուղղությունը, ընդ որում՝ եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ապա $|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$, իսկ եթե $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, ապա $|\vec{c}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$: **129.** ա) $\overrightarrow{AC}$, բ) $\overrightarrow{AB_1}$, գ) $\overrightarrow{CM}$, դ) $\overrightarrow{AB}$, ե) $\overrightarrow{DK}$: **130.** ա) $\overrightarrow{CC_1}$, բ) $\overrightarrow{B_1B}$, գ) $\vec{0}$, դ) $\overrightarrow{CB}$: **131.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) այո, ե) ոչ: **132.** $\vec{a}$ վեկտորի ուղղությունը, ընդ որում՝ եթե $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, ապա $\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$, իսկ եթե $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, ապա $\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$: **133.** ա, գ: **134.** ա) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$, բ) $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{C_1B}$, գ) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$, դ) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$, ե) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$: **135.** ա) $\overrightarrow{AC}$, բ) $\overrightarrow{AC}$, գ) $\overrightarrow{AE}$, դ) $\overrightarrow{BC}$, ե) $\overrightarrow{AK}$, զ) $\vec{0}$: **137.** ա) 1, բ) –1, գ) ±2, դ) այդպիսի թիվ գոյություն չունի: **138.** ա) ±1, բ) k<–1 կամ k>1, գ) –1<k<1: **139.** $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $(-\vec{a})\uparrow\uparrow\vec{b}$, $(0{,}8\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{b}$, $(3\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{b}$, $|\vec{a}|=0{,}5\left|\vec{b}\right|$, $|-\vec{a}|=0{,}5\left|\vec{b}\right|$, $|0{,}8\vec{a}|=0{,}4\left|\vec{b}\right|$, $|3\vec{a}|=1{,}5\left|\vec{b}\right|$: **140.** ա) –1, բ) 2, գ) –0,5, դ) –0,5, ե) –0,5: **142*. Ցուցում.** Օգտագործել խնդիր 141-ի պնդումը և համագիծ վեկտորների սահմանումը: **143. Ցուցում.** Օգտվել խնդիր 142*-ից: **144.** ա) $\vec{a}+\vec{b}$, բ) $-3\vec{b}-\vec{c}$: **145.** ա) 140^0, բ) 140^0, գ) 40^0, դ) 180^0: **146.** ա) 90^0, բ) 90^0, գ) 90^0, դ) 45^0, ե) 135^0, զ) 0^0, է) 180^0: **147.** 7,5Ն: **148.** ա) $10\sqrt{2}$, բ) 0, գ) –10: **149.** ա) $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)<90^0$, բ) $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)>90^0$, գ) $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$: **150.** ա) mn, բ) $-mn$, գ) 0, դ) $-\frac{mn}{2}$: **151.** ա) 0^0, բ) 60^0, գ) 180^0, դ) 90^0, ե) 30^0, զ) 150^0: **152.** ա) –32, բ) 16, գ) 0: **153. Ցուցում.** Նկատել, որ հարթությունն անցնելու է B և C գագաթներով և AD կողի միջնակետով: **154.** ա) Այո, բ) այո, գ) այո, դ) այո: **155.** ա) Այո, բ) այո, գ) այո: **156.** ա) Ճշմարիտ, բ) ճշմարիտ, գ) ճշմարիտ, դ) կեղծ, ե) ճշմարիտ: **157.** բ, դ, ե, զ: **158. Ցուցում.** Նկատել, որ նշված վեկտորներից երկուսը համագիծ են: **159.** Ոչ: **Ցուցում.** Հաշվի առնել, որ շրջանագծի երեք կետերը մի ուղղի վրա չեն գտնվում: **160.** Ոչ, քանի որ յուրաքանչյուրն արտահայտվում է մյուս երկուսի գումարի միջոցով: **161.** Յուրաքանչյուրը պետք է լինի ոչ զրոյական, իսկ գումարը՝ զրոյական վեկտոր: **162.** Հատվող են, հակառակ դեպքում վեկտորները կլինեն համահարթ: **163.** ա) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA_1}$ և այլն, բ) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ և այլն, գ) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ և այլն: **164.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո: **165.** ա) $\sqrt{3}$ սմ, բ) $\sqrt{3}$ սմ, **167.** $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$: **168. Ցուցում.** Օգտագործել խնդիր 136-ի լուծումը: **169.** $\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{A_1C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\overrightarrow{BD_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{B_1D}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$: **170.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$: **171.** ա) Այո, բ) այո, գ) այո, դ) այո: **173. Ցուցում.** Ապացուցել խնդիր 172-ի լուծմանը համանման եղանակով: **175. Ցուցում.** Օգտվել 6.4 կետի խնդիր 2-ի լուծումից: **176.** ա) $\frac{k|q|}{8}$, բ) $\frac{k|q|}{24}$, գ) $\frac{k|q|}{12}$: **177.** ա) $\frac{k|q|}{36}$, բ) $\frac{k|q|}{27}$, գ) $\frac{k|q|}{12}$, դ) $\frac{k|q|}{24}$: **178*.** ա) 0, բ) $\frac{16\sqrt{5}\,k|q|}{a^2}$, գ) $\frac{16\sqrt{2}\,k|q|}{27a^2}$, դ) $\frac{8\sqrt{6}\,k|q|}{9a^2}$: **179.** ա) Ցանկացած,

բ) ոչ բացասական, գ) բացասական, դ) $\lambda=1$ դեպքում, ե) $\lambda=-1$ դեպքում: **180.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո: **181. Ցուցում.** Կատարել հակասող ենթադրության եղանակով:
182. $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$: ա) 6 սմ, բ) $\frac{3m}{2}$: **183.** $\vec{MN}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$: **184.** Ոչ (քանի որ A, B, C, D կետերն ընկած են մի հարթության մեջ): **185.** ա) $\sqrt{3}$, բ) $\sqrt{7}$, գ) 0: **186.** $a\sqrt{3}$: ա) a^2, բ) a^2, գ) 120^0: **188. Ցուցում.** Կառուցել OM անկյունագծով ուղղանկյունանիստ և օգտվել վեկտորների գումարման կանոններից: **189*. Ցուցում.** $\vec{SM}$ -ն արտահայտել հաջորդաբար կողմնային կողով և հիմքի համապատասխան միջնագծով ուղղված վեկտորներով, դրանք գումարել՝ միաժամանակ ցույց տալով, որ $\vec{AM}+\vec{BM}+\vec{CM}=\vec{0}$: **190.** ա) Ոչ, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո: **191.** ա) Ոչ, բ) ոչ, գ) այո:
192. ա) ճշմարիտ, բ) ճշմարիտ, գ) կեղծ, դ) ճշմարիտ: **193.** ա) $\vec{m_1}$ և $\vec{m_3}$, բ) $\vec{m_1}$, $\vec{m_2}$ և $\vec{m_3}$ կամ $\vec{m_1}$, $\vec{m_3}$ և $\vec{m_4}$: **194.** բ) $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}-2\vec{p}$, գ) $\vec{c}=2\vec{m}+\vec{n}-3\vec{p}$: **195.** $\frac{16\sqrt{3}\,k|q|}{9}$:
196. Ցուցում. Հաշվի առնել, որ հարթությունն անցնում է՝ ա) A և D_1 գագաթներով և BC կողի միջնակետով, բ) A և C_1 գագաթներով և AB կողի միջնակետով: **197. Ցուցում.** Օգտագործել 6.4 կետի խնդիր 1-ի պնդումը և համագիծ վեկտորների հատկությունը: **198. Ցուցում.** Նախ ցույց տալ, որ $\vec{AA_1}=\vec{C_1C}$ և $\vec{BB_1}=\vec{D_1D}$:
199. Ցուցում. Ցույց տալ, որ $\vec{MN}$ և $\vec{AC}$ վեկտորները համագիծ են:

ԳԼՈՒԽ III

203. ա) C-ն, բ) H-ը, գ) F-ը, դ) C-ն, G-ն, H-ը, ե) A-ն, C-ն, D-ն, F-ը, M-ը, զ) B-ն, F-ը, H-ը: **206.** $C(1, -1, 0)$, $B_1(1, 0, 1)$, $C_1(1, -1, 1)$, $D_1(0, -1, 1)$: **207.** $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, 0, 3)$, $A_3(0, 2, 3)$: **208.** ա) (3, 2, –1), բ) (3, –2, –1), գ) (–3, –2, –1): **209.** $\vec{OA}\{-3, 2, 1\}$, $\vec{OB}\{1, 3, 1\}$, $\vec{OC}\{0, -6, 2\}$, $\vec{OD}\{-1, 0, 0\}$: **210.** Համագիծ են, քանի որ O, A և B կետերն ընկած են մի ուղղի (Ox առանցքի) վրա: **211.** $\vec{a}\{-1, 0, 2\}$: Ուղիղն ընկած է հարթության մեջ: **212.** $\vec{a}=\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$: **213.** $-\vec{i}$ -ն՝ {–1, 0, 0}, $-\vec{j}$ -ն՝ {0, –1, 0}, $-\vec{k}$ -ն՝ {0, 0, –1}: **214.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) այո: **215.** $\vec{OA_1}\{2, 0, 2\}$, $\vec{OC}\{2, 4, 0\}$, $\vec{OB_1}\{0, 4, 2\}$, $\vec{OC_1}\{2, 4, 2\}$: **216.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո, ե) այո: **218.** {1, 0, 4,4}: **219.** {2, 1, 1}, {1, 2, 1} և {2, 1, 2}: **220.** {1, –1,2, 8}, {–4, –2, 5,4} և {–2, –2,8, 1,4}: **221.** ա) {1, 0, 1}, բ) {0, –1, 1}, գ) {1, –1, 1}: **223.** $\vec{AB}\{-1, -7, 6\}$, $\vec{AC}\{-4, -4, 2\}$, $\vec{BC}\{-3, 3, -4\}$, $\vec{BA}\{1, 7, -6\}$: **224.** ա) $D(2, 1, -2)$, բ) $D(0, -1, 4)$:

225. {–2, 0, 8}, {–24, –2, $6\sqrt{2}$ } և {0, $-\frac{1}{20}$, 0,1}: **226.** $\vec{p}\{1, 0, 6\}$, $\vec{q}\{-6, -2, -9\}$:
228. $\vec{a}$-ն և $\vec{c}$-ն հակուղղված, $\vec{b}$-ն և $\vec{f}$-ը հակուղղված, $\vec{d}$-ն և $\vec{e}$-ն հակուղղված:
229. ա) m=3, $n=\frac{4}{3}$, բ) m=–15, $n=\frac{2}{5}$, գ) m=–1, n=2: **230.** 3, $3\sqrt{2}$ և 4: **231.** ±2: **232.** ±3:
233. $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$: **234.** $B(\sqrt{3}$, 0, 0) կամ $B(-\sqrt{3}$, 0, 0): **235.** ա) –3, բ) $-4\sqrt{2}$:
236. ա) 0, 10, –1, բ) 6, 3, 5, գ) 10, 11, –3: **237.** ա) 1, –6, 0, բ) 1, –1, –3: **238.** $-\frac{2}{3}$:
239. ա) Սուր, բ) բութ, գ) ուղիղ: **240.** $\vec{i}$-ի հետ՝ բութ, $\vec{j}$-ի հետ՝ ուղիղ, $\vec{k}$-ի հետ՝ սուր: **241.** ա) –3, բ) 1, գ) 1 կամ 3, դ) այդպիսի արժեք գոյություն չունի: **242.** 135^0:
243. C(0, 0, $\frac{1}{2}$): **244.** **Ցուցում.** Գտնել $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ և $\overrightarrow{CA}$ վեկտորների կոորդինատները և օգտագործել սկալյար արտադրյալը: **245.** ա) 3, բ) 9: **246.** B-ն: **247.** ա) Oxy-ից՝ 3, Oxz-ից՝ 4, Oyz-ից՝ 3, բ) Ox-ից՝ 5, Oy-ից՝ $3\sqrt{2}$, Oz-ից՝ 5: **248.** $8+2\sqrt{3}$: **249.** C(0, 0, 0): **250.** 9 և –5: **251.** ա) B(2, –1, –2), բ) A(–6, –4, 10): **252.** (6, –1, 4), (3, 1, 1) և (1, –2, –1): **253.** ա) $\sqrt{42}$, բ) Oxy-ից՝ 5, Oxz-ից՝ 1, Oyz-ից՝ 4: **254.** ա) D(6, 2, –2), բ) D(0, –2, 2): **255.** ա) A_1(1, 0, 2), A_2(1, 0, –2), A_3(–1, 0, –2), B_1(0, 0, –3), B_2(0, 0, 3), B_3(0, 0, 3), բ) A_1(1, 0, 2), A_2(–1, 0, 2), A_3(–1, 0, –2), B_1(0, 0, –3), B_2(0, 0, –3), B_3(0, 0, 3): **256.** ա) 6, բ) 4, գ) $4\sqrt{2}$: **257.** M_1(1, 0, 3), M_2(0, 2, 0), M_3(0, 0, –3): **258.** ա) 5, բ) $10\sqrt{2}+10$: **259.** C(–2, –2, –2), D(2, –2, –2), A_1(2, 2, 2), B_1(–2, 2, 2), C_1(–2, –2, 2), D_1(2, –2, 2): **260.** ա) Oz առանցքը, բ) Oy առանցքը, գ) Ox առանցքը: **261.** ա) Ox առանցքին ուղղահայաց և դրան (1, 0, 0) կետում հատող հարթություն, բ) Oy առանցքին ուղղահայաց և դրան (0, 1, 0) կետում հատող հարթություն, գ) Oxy հարթությանն ուղղահայաց և դրան (1, 1, 0) կետում հատող ուղիղ: **262.** ա) R=5, M(3, –2, 1), բ) $R=\sqrt{3}$, M(–1, 0, 4), գ) $R=4\sqrt{2}$, M(0, 5, 0): **263.** ա) $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$, բ) $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=12$: **264.** ա) R=3, M(1, 0, 0), բ) $r=2\sqrt{6}$, M(3, –2, 0), գ) $R=2\sqrt{3}$, M(0, 1, –2): **265.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=24$: **266.** $(x-3)^2+y^2+z^2=16$: ա) Այո, բ) ոչ: **267.** ա) O կետն ընկած է գնդային մակերևույթի վրա, բ) A կետը գնդային մակերևույթի կենտրոնն է, գ) B կետն ընկած է գնդի ներսում, դ) C կետն ընկած է գնդից դուրս: **268.** ա) $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$, բ) $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$: **269.** Oxy հարթությունը շոշափում է, Oxz հարթությունը՝ հատում (հատույթը մեծ շրջան է), իսկ Oyz հարթությունը հատման կետ չունի: **270*.** $(x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 + (z \pm 1)^2 = 1$: Ութ մակերևույթ: **271.** r=3, կենտրոնը՝ (2, 1, 0): **272.** Գնդերը հատում չունեն: **Ցուցում.** Գտնել կենտրոնների հեռավորությունը և համեմատել շառավիղների գումարի հետ: **273*.** 1< a < 9, a=3 արժեքի դեպքում: **Ցուցում.** Օգտվել 9.4 կետի խնդիր 2-ի լուծման եղանակից, և հատույթի շառավիղը դիտելով որպես a-ից կախված ֆունկցիա՝ գտնել մեծագույն արժեքը: **274.** ա) Oxy առանցքին ուղղահայաց և դրան (1, –1, 0) կետում հատող ուղիղ, բ) Oyz հարթության

մեջ 2 շառավիղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը $O(0, 0, 0)$ կետն է, գ) 3 շառավիղով կիսագունդ, որի կենտրոնը (0, 2, 0) կետն է, և այն ընկած է Oxy հարթությունից վերև (ոչ բացասական ապլիկատով կիսատարածության մեջ)։ **277.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ։ **278.** ա) $A_1(-1, -2, -3)$, $B_1(1, 0, 2)$, բ) $A_1(-1, -2, -1)$, $B_1(1, 0, 4)$, գ) $A_1(1, -6, -3)$, $B_1(3, -4, 2)$։ **280.** ա) $A_1(0, -1, -1)$, $B_1(-2, 2, 2)$, բ) $A_1(0, -1, 1)$, $B_1(2, -2, -2)$։ **281.** ա) Oxz, բ) Oxy։ **282.** ա) $A_2(-1, -2, 3)$, բ) $A_2(-1, -2, -3)$, գ) $A_2(-1, -2, 3)$։ **285.** ա) Oy առանցքին, բ) Ox առանցքին՝ հակուղղված, գ) Oz առանցքին, դ) Ox առանցքին (չի տեղաշարժվում), ե) Ox և Oy դրական կիսառանցքներով կազմված անկյան կիսորդին և դրա շարունակությանը։ **286.** ա) $A_1(0, 2, 0)$, բ) $A_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, գ) $A_1(1, \sqrt{3}, 0)$, դ) $A_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$։ **289.** 90^0, 180^0 ժամսլաքի կամ հակառակ ուղղությամբ։ **290.** $A_1(1, 2, 0)$, $B_1(3, 1, 4)$, $C_1(-1, 2, 2)$։ **292.** ա) Ոչ, բ) ոչ, գ) այո, դ) ոչ, ե) ոչ, զ) այո, է) այո։ **293.** ա) $A_2(0, 1, -1)$, բ) $A_2(-2, 1, -3)$։ **294.** Այո։ **296.** Այո, $k=2$։ ΔBMN-ի կամայական M կետին հարաբերակցել BM ճառագայթի այն M_1 կետը, որի համար բավարարվում է $BM_1=2BM$ պայմանը։ **297.** Այո։ Նմանության k գործակիցը հավասար է ծնորդների հարաբերակցությանը։ Կոներից մեկի կամայական M կետը հարաբերակցել SM ճառագայթի (S-ը կոնի գագաթն է) այն M_1 կետը, որի համար բավարարվում է $SM_1=k\cdot SM$ պայմանը, որտեղ k-ն նմանության գործակիցն է։ **298.** Այո, շառավիղների հարաբերությամբ։ **301.** $k=150$։ **302*.** **Ցուցում.** Օգտվել նմանադրման և կենտրոնային համաչափության սահմանումներից։ **303.** ա) $A_1(3, 1, 0)$, $B_1(-1, 3, 0)$ և $C_1(0, 2, 0)$, բ) $A_2(3, 0, 2)$, $B_2(-1, 0, 0)$ և $C_2(0, 0, 0)$, գ) $A_3(0, 1, 2)$, $B_3(0, 3, 0)$ և $C_3(0, 2, 0)$։ **304.** $B(1, 1, 0)$, $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$, $A_1(-1, -1, 2)$, $B_1(1, 1, 2)$, $C_1(1, -1, 2)$, $D_1(-1, -1, 2)$։ **305.** ա) 2-րդ, բ) 6-րդ, գ) 13-րդ, դ) 8-րդ։ **306.** ա) (0, 0, 0), (10, 0, 0), (10, 20, 0), (0, 20, 0), (0, 0, 3), (10, 0, 3), (10, 20, 3), (0, 20, 3), բ) (0, 0, 15), (10, 0, 15), (10, 10, 15), (0, 10, 15), գ) (5, 15, 10,5), դ) $2\sqrt{34}\approx 11{,}66$ մ։ **307.** ա) $y=\pm1$, $z=\pm1$, բ) $y=\pm1$, $z=\pm1$, գ) y-ը կամայական, $z=0$։ **308.** ա) $|x|=|y|=|z|$, բ) $|x|=|z|$։ **309.** $\left\{\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$ կամ $\left\{-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$։ **310.** ա) Ուղղահայաց է, բ) ընկած է հարթության մեջ, գ) հարթության հետ կարող է կազմել ցանկացած անկյուն։ **311.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) ոչ։ **312.** $B(5, -6, -7)$։ **313.** ա) $\{4, -3, 0\}$, բ) 15, գ) $\{-3, 3, 0\}$, դ) $\vec{p}=-4\vec{i}+4\vec{j}$, ե) $5\sqrt{5}$։ **314.** $\vec{v}\{-3, -3, 1{,}5\}$, $|\vec{v}|=4{,}5$։ **315.** ա) $x=y=0$ և $z\neq0$, բ) $y=0$ և $x^2+z^2\neq0$, գ) $x=y=z$։ **316.** ա) $\{1, 1, 3\}$ կամ $\{1, 3, 3\}$, բ) $\{1, 2, 2\}$ կամ $\{1, 2, 4\}$։ **317.** -66։ **318.** $m=2$։ **319.** ա) 90^0, բ) 45^0, գ) 60^0։ **320.** 60^0։ **321.** **Ցուցում.** $\overrightarrow{CM}$ վեկտորն արտահայտել $\overrightarrow{BD}$ վեկտորին ուղղահայաց երկու վեկտորներով և օգտագործել $\overrightarrow{CM}$ և $\overrightarrow{BD}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը։ **322*.** **Ցուցում.** Խորանարդի մի գագաթից ելնող երեք կողերով ուղղված վեկտորները նշանակել $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, խորանարդի անկյունագծով և նրա նիստի անկյունագծով ուղղված վեկտորներն արտահայտել $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորներով և հաշվել դրանց սկալյար արտադրյալը։ **323.** Ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյուն է: **324.** 1: **325.** (0, 2, $\frac{1}{2}$): **326.** Oxy հարթությանը զուգահեռ է, իսկ Oxz և Oyz հարթություններին՝ ուղղահայաց: **Ցուցում.** Նկատել, որ այդ կետերի համար z=5: **327.** C(0, 8, 0): **328.** $\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 3\right)$: **329.** R=5, M(1, 0, 0): **330.** $(x-5)^2+y^2+(z-3{,}5)^2=42{,}25$: Կոորդինատների սկզբնակետն ընկած է գնդի ներսում: **331*.** (1, 0, 0) և (1, 0, 4): **Ցուցում.** Նկատել, որ A, B և C կետերը (ուրեմն նաև ստորին հիմքը) ընկած են Oxy հարթության մեջ, իսկ D կետը (ուրեմն նաև վերին հիմքը)՝ z=4 հարթության մեջ: **332.** ա) Oxy հարթության մեջ r=3 շառավիղով շրջան, որի կենտրոնը (0, 2, 0) կետն է, բ) Oxy հարթության մեջ (1, 0, 0) և (1, 1, 0) ծայրակետերով հատված, որը զուգահեռ է Oy առանցքին, գ) 3×1×2 չափսերով ուղղանկյունանիստ, որի ընդհանուր գագաթով երեք նիստերն ընկած են կոորդինատային հարթությունների մեջ, դ) r=1 շառավիղով և h=2 բարձրությամբ գլանի կողմնային մակերևույթ, որի հիմքերից մեկն ընկած է Oxy, իսկ մյուսը՝ z=2 հարթության մեջ, ե) r=2 շառավիղով և h=1 բարձրությամբ գլան, որի հիմքերից մեկն ընկած է z=1, իսկ մյուսը՝ z=2 հարթության մեջ: **333*.** $C(-2\sqrt{3}$, 2, 0), S(0, 0, $4\sqrt{2}$) կամ S(0, 0, $-4\sqrt{2}$): Խնդիրը նույնպես կլուծվեր, եթե տրված չլիներ, որ «կողը $4\sqrt{3}$ է», և նշված չլիներ, որ A կետն ընկած է «Oy առանցքի վրա»: **334.** ա) {2, 0, –2} վեկտորով, բ) {–2, 0, 2} վեկտորով: **335.** 30^0 ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ, (0, 0, 2) կետի: **336.** **Ցուցում.** Դիտարկել a և b ուղիղներով անցնող α հարթության մեջ a և b ուղիղների կազմած անկյունների կիսորդները, կամ α-ին ուղղահայաց և այդ կիսորդներով անցնող հարթությունները, ինչպես նաև α-ին ուղղահայաց և M կետով անցնող առանցքի շուրջ պտույտները: **337.** ա) 24(π+2), բ) 16(π+3), գ) 12(3π+4), դ) 6(π+8): **338.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո, ե) ոչ, զ) այո, է) այո: **339.** 32π և 64π:

ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ ԵՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

340. ա) Հավասար են, բ) a կողմի շուրջ պտտումից ստացվածի մակերեսն ավելի մեծ է $\frac{b}{a}$ անգամ: **341.** $[3\pi, 12\pi]$ միջակայքի արժեքները: **342.** ա) և բ) a էջի շուրջ պտտումից ստացվածի մակերեսն ավելի մեծ է: **343.** $84\sqrt{3}\pi$ սմ²: **344.** **Ցուցում.** Դիտարկել այն կետը, որում հատվում են ուղղանկյունների անկյունագծերի հատման կետերից ուղղանկյունների հարթություններին տարված ուղղահայացները, և ցույց տալ, որ այն հավասարահեռ է ուղղանկյունների բոլոր գագաթներից: **345.** 5սմ: **346.** ա) $2\sqrt{2}$ սմ, բ) $\frac{4}{3}$ սմ: **347*.** $\frac{a}{2}\sqrt{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$:

348. ա) $\vec{a}$-ն՝ կամայական, $\vec{b}$-ն՝ զրոյական, բ) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, կամ վեկտորներից մեկը զրոյական, գ) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ և $|\vec{a}|>|\vec{b}|$, կամ $\vec{b}$-ն զրոյական, դ) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$: **349.** ա)10 սմ, բ) 6 սմ, գ) 6 սմ, դ) $6\sqrt{3}$ սմ: **350.** –3: **351. Ցուցում.** Միջնագծերով ուղղված վեկտորների գումարն արտահայտել եռանկյան կողմերով ուղղված վեկտորների գումարով և այնուհետև օգտվել «Եռանկյունն կազմող վեկտորների գումարը զրո է» պնդումից: **352*.** Սուր: **Ցուցում.** Օժանդակ կառուցում կատարելով՝ A կետից տեղադրել BD_1 վեկտորը, ստանալ եռանկյունն և օգտվել կոսինուսների թեորեմից: **353.** ա) $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$ և այլն, բ) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ և այլն, գ) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ և այլն, դ) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ և այլն: **354. Ցուցում.** Օգտվել 6.4 կետի խնդիր 1-ի պնդումից: **355.** 3 սմ: **356*. Ցուցում.** Օգտվել սկալյար արտադրյալի հատկություններից: **357.** 20 Ջոուլ: **358. Ցուցում.** Նախ ցույց տալ, որ այդ վեկտորներով կարելի է կառուցել տրված եռանկյանը հավասար եռանկյունն և այնուհետև օգտվել երեք կետերի կանոնից: **359. Ցուցում.** Օգտվել խնդիր 174-ի լուծումից: **360*. Ցուցում.** Զուգահեռանիստի մի գագաթից ելնող երեք կողերով ուղղորդված վեկտորները նշանակել $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ և ցույց տալ, որ այդ գագաթից ելնող ուղղորդված անկյունագիծը հավասար է $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, իսկ նույն գագաթից դեպի նշված եռանկյան միջնագծերի հատման կետին ուղղված վեկտորը՝ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$: **361.** $\vec{b}\{3,2,2\}$ (ընդհանուր առմամբ՝ $\{3m, 2m, m+1\}$, որտեղ m-ը կամայական թիվ է): **362.** $B(0, 0, \sqrt{6})$ կամ $B(0, 0, -\sqrt{6})$: **363.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո, ե) այո, զ) այո: **364.** դ, ե: **365.** ա) ճշմարիտ, բ) կեղծ, գ) ճշմարիտ, դ) ճշմարիտ: **366.** Պարագիծը՝ $4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$, մակերեսը՝ $2\sqrt{3}$, անկյունները՝ 30^0, 30^0, 120^0: **367.** ա) (–4, 4, 3) կոորդինատներով կետը, բ) (–3, 2, 2) կոորդինատներով կետը, գ) (m–3, m+2, –m+2) կոորդինատներով կետը: **368.** ա) Այո (համաչափություն Oyz հարթության նկատմամբ), բ) այո (համաչափություն Ox առանցքի նկատմամբ), գ) ոչ, դ) ոչ, ե) ոչ, զ) այո (զուգահեռ տեղափոխություն $\{-1, 0, 0\}$ վեկտորով), է) այո (նախ համաչափություն O կետի նկատմամբ, հետո զուգահեռ տեղափոխություն $\{1, 1, 1\}$ վեկտորով): **369*. Ցուցում.** Օգտվել 10.2 կետի պարզաբանումից և ուղղի աքսիոմից: **370*. Ցուցում.** Նախ կատարել այնպիսի զուգահեռ տեղափոխություն, որ a ուղիղը փոխադրվի b ուղղին հատվող ուղղի և հետո կատարել շարժում ըստ խնդիր 336-ի: **371.** 48(2π+1): **372.** $18(\sqrt{7}+1)$ և $\dfrac{9(\sqrt{7}+1)}{2}$:

Բովանդակություն

Երկրաչափության 10-րդ դասարանի դասագրքի հիմնական բովանդակությունը

ՍԱՐԻԲԵԿ ԷԼԻԲԵԿԻ ՅԱԿՈԲՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

11-րդ դասարանի դասագիրք

Հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար

Մասնագիտական խմբագիր՝ Լավրենտի Աղասու Մաքևոսյան

Խմբագիր՝ Ա. Ոսկանյան
Սրբագրիչ՝ Ա. Պապյան
Ձևավորումը՝ Ն. Հայրապետյանի
Լ. Ղամբարյանի
Շապիկի ձևավորումը՝ Ս. Դավիդյանի
Շարվածքը՝ Գ. Խաչատրյանի

Պատվեր՝ 923: Տպաքանակ՝ 36 460:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100/16: տպ. մամուլ:
Տառատեսակը՝ DallakTimeNew, Sovorakan:

Տպագրված է «**Տիգրան Մեծ**» հրատարակչություն ՓԲԸ տպարանում